

### Sudoku

In een sudoku komen de getallen van 1 t/m 9 in iedere rij, in iedere kolom en in ieder dik omrand 3x3-vierkant precies één keer voor.

				7				
1	5							8
3		9	8			5	2	6
	1	8						2
			5		9			
9						6	4	
4	2	3			6	8		1
6							5	9
				4				

### Dominopuzzel

Een dominospel bestaat uit 28 stenen met steeds twee getallen van 0 t/m 6. Plaats de dominostenen zo dat de getallen rechts en onder het vierkant steeds de som is van de bijbehorende kolom. Uiteraard moeten de stenen die elkaar raken dezelfde waarde hebben aan de kant waar ze elkaar raken.

		5				2	2			15
4			5	3						16
4										10
										14
	5									19
				2						16
1						3			3	25
				4						16
2	5									12
	5			6		4				25
20	22	21	35	23	5	15	16	3	8	

Dominostenen:

00	23
01	24
02	25
03	26
04	33
05	34
06	35
11	36
12	44
13	45
14	46
15	55
16	56
22	66

1. Vul het kruisrekenraadsel in:

1	2	3			4
5				6	
	7				
8				9	10
11				12	
			13		

Horizontaal:

- $3 \cdot 25 \cdot 23$
- $315 + 161 + 249 + 89$
- priemgetal tussen 17 en 23
- $2.898.280 : 308 + 3$
- $155 : 5$
- $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$
- $5\frac{1}{7} \cdot 3\frac{8}{9}$
- $321,86 : 3,09$

Verticaal:

- $1\frac{5}{7} \cdot 10\frac{1}{2}$
- priemgetal tussen 710 en 720
- $407 \cdot 60$
- 3· priemgetal tussen 19 en 29
- $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 37$
- $4 \cdot 5 \cdot 40 + 3 \cdot 4 \cdot 5$
- 13-voud tussen 100 en 110

2. Vul het kruiswoordraadsel in:

1	2	3			4
5				6	
	7				
11				9	10
8				12	
			13		

Horizontaal:

- soort dieren
- mak
- overblijfsel na brand
- harde val
- soort vogel
- deel van hoofd
- ander woord voor daar
- deel van lichaam

Verticaal:

- heeft iets te maken met voedsel
- niet zo lang geleden
- schoonmaakgereedschap
- herkauwend dier
- stuk landbouwgrond
- insect
- niet rijk

3. Vergelijk opgave 1 en 2 en kraak de code!

- |     |     |
|-----|-----|
| 1 = | 6 = |
| 2 = | 7 = |
| 3 = | 8 = |
| 4 = | 9 = |
| 5 = | 0 = |

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
												14
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48			15
38									49			16
37									50			17
36			57	56	55	54	53	52	51			18
35											19	
34											20	
33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21

### De munt op de spiraalweg

Dit spel wordt gespeeld door twee personen. Een munt wordt op veld 1 geplaatst. De spelers schuiven om de beurt de munt vooruit. Zoals bij de toren van het schaakspel mag er per beurt maar in één richting geschoven worden over een willekeurige afstand. Bijvoorbeeld vanaf veld 15 kun je schuiven tot veld 21, maar niet verder. Degene die uiteindelijk de munt op veld 57 schuift, is de winnaar.

1. Speel dit spel enige malen en probeer een altijd winnende strategie te vinden. Leg uit welke speler (degene die begint of de ander) altijd kan winnen en hoe hij dat moet aanpakken.

### De munt op de spiraalweg met één pas

Het spel is hetzelfde als hiervoor, maar nu mag in de loop van het spel één keer gepast worden. Dat wil zeggen, als één speler gepast heeft, moet de ander altijd zetten als hij aan de beurt is. Het is niet verplicht om de mogelijkheid "één keer passen" te gebruiken.

2. Speel dit spel enige malen en probeer een altijd winnende strategie te vinden. Leg uit welke speler (degene die begint of de ander) altijd kan winnen en hoe hij dat moet aanpakken.
3. Onderzoek verdere varianten van dit spel. Hoe moet je spelen als er twee keer gepast mag worden? Wat gebeurt er als je vaker mag passen? Schrijf je bevindingen overzichtelijk op en geef een duidelijke uitleg.

Los op, de eerste 5 vierkanten met gehele getallen, de laatste ook met breuken:  
Schrijf je berekeningen in je schrift!

@	#	@	#	@	#	60
\$	*	@	€	\$	*	50
€	*	@	\$	#	@	58
#	&	@	&	&	#	68
€	\$	@	#	\$	&	62
\$	*	@	*	#	€	52

64 44 66 58 56 62

@ =                    \$ =  
& =                    # =  
€ =                    \* =

E	F	B	C	B	E	32
D	A	C	F	A	E	23
A	B	D	C	D	E	24
D	A	B	F	A	E	26
F	E	F	E	F	E	36
B	A	D	C	B	E	26

28 24 30 28 27 30

A =                    D =  
B =                    E =  
C =                    F =

←	↑	↑	→	→	←	180
←	→	→	←	↓	←	178
↑	↑	↗	↗	→	→	174
→	↗	↗	↖	↗	→	171
↖	←	↑	↖	↑	←	186
←	←	←	←	←	←	192

184 182 179 180 174 182

→ =                    ↑ =  
↓ =                    ↗ =  
← =                    ↖ =

N	N	N	N	N	⊖	20
N	N	N	N	X	N	22
X	⊖	X	⊖	X	⊖	36
N	X	⊖	P	P	P	21
Z	Z	P	P	X	X	40
Γ	P	Γ	Γ	N	Z	40

35 37 34 25 29 39

N =                    P =  
⊖ =                    Z =  
X =                    Γ =

α	α	α	α	α	α	30
β	γ	δ	α	ε	ε	34
γ	α	ε	β	ζ	ζ	41
α	δ	ζ	β	ε	δ	38
δ	β	γ	α	δ	ζ	42
β	α	γ	α	γ	β	38

37 36 41 32 37 40

α =                    δ =  
β =                    ε =  
γ =                    ζ =

(	x	-	)	(	-	2 ½
x	x	x	(	:	-	2 ¾
+	+	+	+	+	+	1
-	+	x	+	x	-	2
:	:	x	-	:	+	4
-	-	x	(	(	+	2

2 ¾ 2 ½ 2 2 3 2

+ =                    :=  
x =                    (=   
- =                    ) =

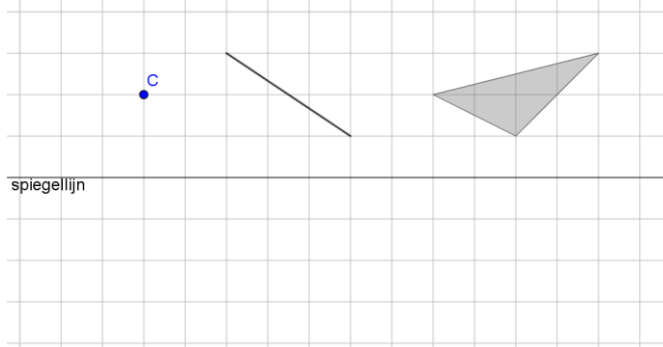
Kopieer de voorkant en de achterkant van deze opdrachtkaart.

Op je geodriehoek zie je vanaf de 0 een lijn omhoog lopen naar de punt van de driehoek. Deze lijn staat **loodrecht** op de lange kant van de geodriehoek.

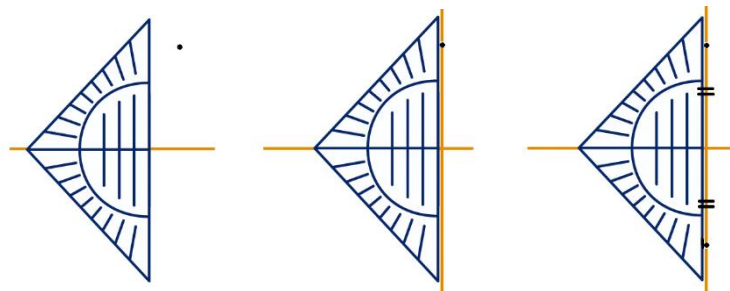
Als je een punt spiegelt in een lijn, doe je dat altijd loodrecht. Er zijn drie manieren om een punt in een lijn te spiegelen:

- Gebruik maken van het rooster. Dit gaat alleen als het punt mooi op het rooster ligt en de lijn “handig” ten opzichte van het rooster.

1. Spiegel punt  $C$ , de lijn en de driehoek in de spiegellijn.

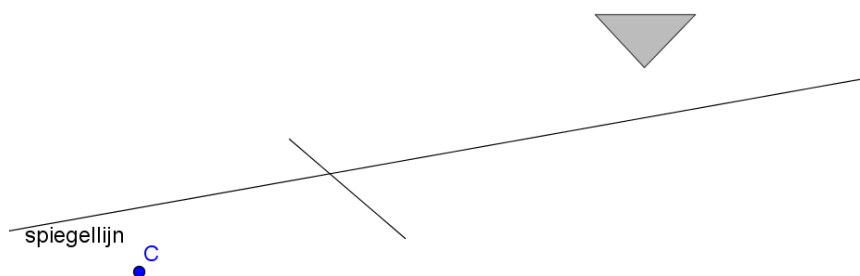


- Met behulp van een geodriehoek. Je legt de lijn die door de 0 gaat op de spiegellijn en schuift over de lijn over de spiegellijn tot de lange zijde van je geodriehoek het punt raakt dat je wilt spiegelen. Trek een lijn van het punt tot de spiegellijn langs de geodriehoek en trek de lijn precies even lang door. Je komt dan uit in het spiegelpunt van je punt.

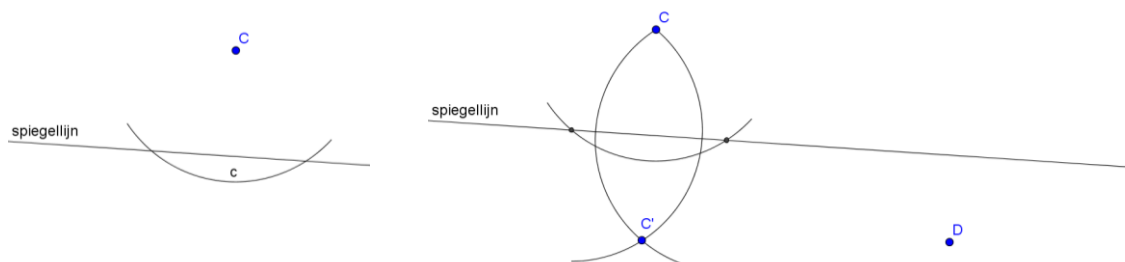


Het nadeel van deze methode is dat je de lengte goed moet aflezen en dat is altijd een beetje onnauwkeurig.

2. Spiegel punt  $C$ , de lijn en de driehoek met behulp van een geodriehoek in de spiegellijn.

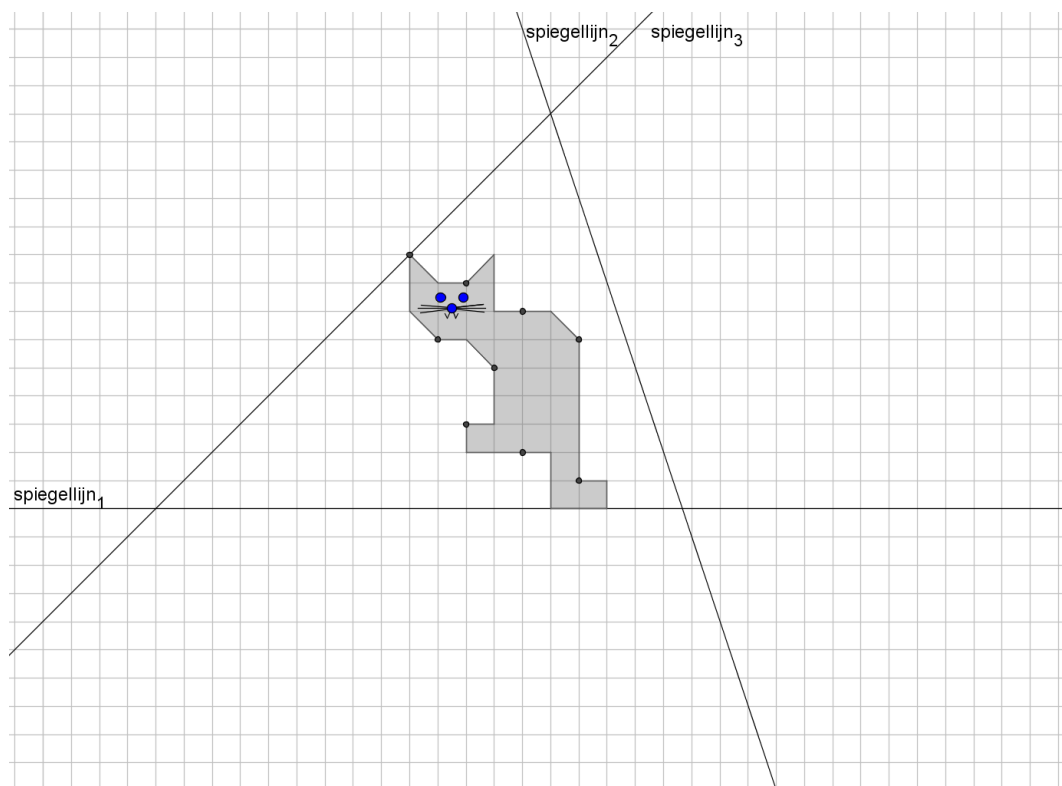


- Met een passer. Dit is de meest nauwkeurige methode omdat je niet hoeft te meten. Zet de scherpe punt van je passer op het punt dat je wilt spiegelen en teken een boogje dat twee keer door de spiegellijn gaat. Zet dan de scherpe punt op een van de snijpunten van het boogje en de spiegellijn en teken een boogje aan de kant van de spiegellijn waar het spiegelpunt van je punt komt. Doe dit ook een keer met de scherpe punt in het andere snijpunt van het boogje met de spiegellijn. De twee boogjes snijden elkaar nu in het spiegelbeeld van je punt.



3. Hoe heet de figuur die je krijgt als je punt  $C$ , de snijpunten van de boog met de spiegellijn en het spiegelpunt met elkaar verbindt? Leg uit dat je altijd zo'n figuur kunt tekenen als je een punt in een lijn spiegelt met behulp van een passer.
4. Spiegel punt  $D$  in de spiegellijn in het plaatje hierboven.

Hieronder zie je een plaatje van een poes en drie spiegellijnen.

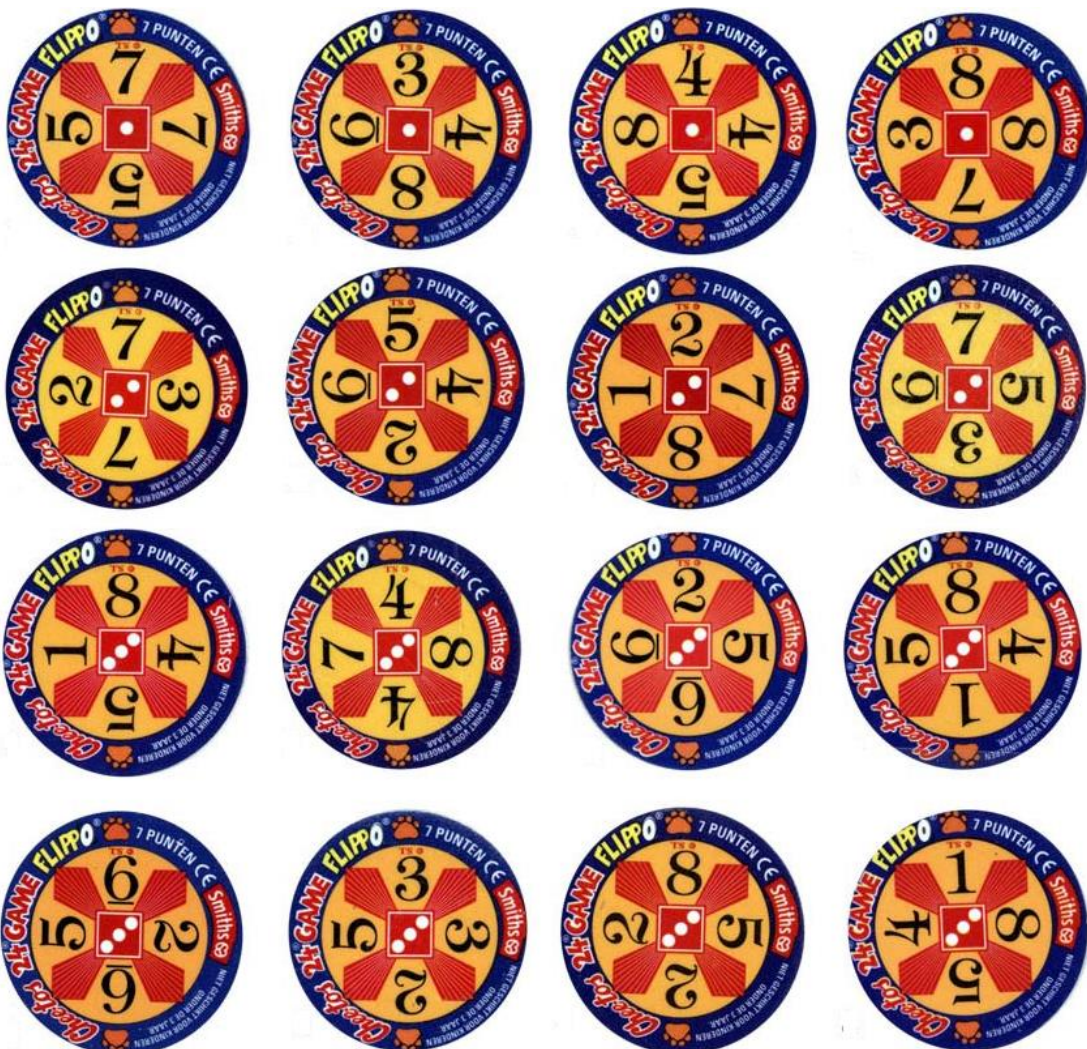


4. Spiegel de poes in spiegellijn 1.
5. Spiegel de poes in spiegellijn 2.
6. Spiegel de poes in spiegellijn 3. Je kunt het beste beginnen met de punten die aangegeven zijn op de omtrek van de poes, want die zijn het makkelijkst om te spiegelen.

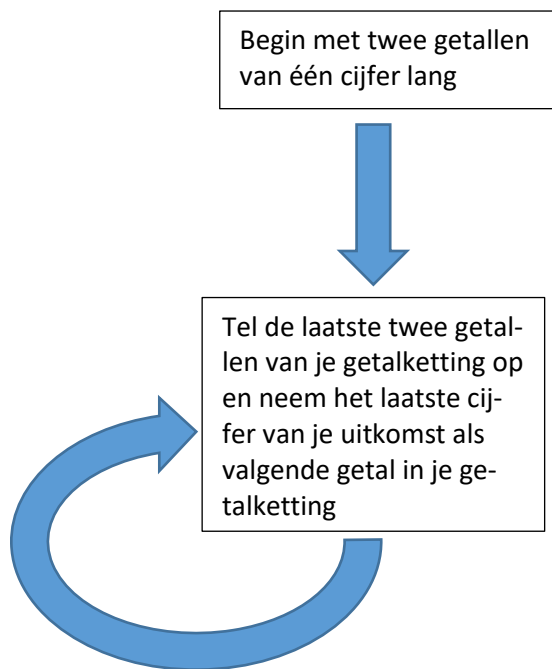
In de jaren 90 van de vorige eeuw zaten er bij zakken chips van een bepaald merk flippo's. Flippo's zijn ronde kaartjes met plaatjes of puzzeltjes om te verzamelen. Bij de 24-flippo's is het de bedoeling om met de vier getallen die op de flippo staan een som te maken waar 24 uit komt. Je mag optellen, aftrekken, delen, vermenigvuldigen en haakjes gebruiken.

We zetten nog even de voorrangsregels op een rij:

- Eerst moet je de delen van de som uitrekenen die tussen haakjes staan, uiteraard weer rekening houdend met de voorrangsregels.
  - Vervolgens moet je vermenigvuldigen en delen in de volgorde waarin het staat.
  - Tot slot ga je optellen en aftrekken in de volgorde waarin het staat.
1. Zeer eenvoudige rekenmachines geven als antwoord 9 geven op de som  $1 + 2 \cdot 3$ . Leg uit waarom dat niet goed is.
  2. Plaats haakjes zodat de volgende sommen kloppen:
    - $4 + 5 \cdot 7 + 2 = 81$
    - $4 + 5 \cdot 7 + 2 = 65$
    - $4 + 5 \cdot 7 + 2 = 49$
    - $4 + 5 \cdot 7 + 2 = 41$
  3. Zoek de oplossing van de volgende flippo's en schrijf de som op. Let op de haakjes!



In deze opdracht gaan we getalkettingen onderzoeken. Een getalketting maak je als volgt:



1. Maak de getalketting die begint met 42. Wat valt je op?
2. Maak de getalketting die begint met 68. Vergelijk deze met de getalketting uit vraag 1. Wat valt je op? Hoe had je dit vooraf kunnen weten?
3. Je ziet dat de getalkettingen uit opgave 1 en 2 uit alleen even getallen bestaan. Onderzoek of er ook getalkettingen zijn die alleen uit oneven getallen bestaan.
4. Als je begint met 12, zie je dat er een regelmatig patroon van even en oneven getallen ontstaat. Onderzoek of dat altijd zo is en welke patronen van even en oneven getallen je kunt krijgen.
5. De getalkettingen uit opgaven 1 en 2 gaan zichzelf herhalen na 4 cijfers. We spreken af dat we het daarom kettingen van lengte 4 noemen. Onderzoek wat de kortste ketting is die je kunt maken.
6. Onderzoek of er een langste ketting is of dat er ook kettingen zijn die altijd maar doorgaan zonder ooit te gaan herhalen. Als er een ketting is die altijd maar doorgaat, leg dan uit hoe dat kan. Als die er niet is, bepaal dan wat de langste ketting is.
7. De kettingen uit opgave 1 en 2 zijn eigenlijk dezelfde ketting. Leg uit waarom.
8. Bepaal hoeveel echt verschillende kettingen er zijn en leg uit hoe je zeker weet dat het er niet meer zijn.

De getallen 1, 4, 9, enz. zijn kwadraten. Kwadraten zijn de getallen die de uitkomst zijn van de som waarbij je een getal keer zichzelf doet, dus bijv.  $1 \cdot 1 = 1$ ,  $2 \cdot 2 = 4$  en  $3 \cdot 3 = 9$ . Je zegt dan "9 is het kwadraat van 3" omdat 3 keer 3 gelijk is aan 9.

- Onderzoek op welke cijfers een kwadraat kan eindigen. Licht je antwoord toe.
- Neem de tabel over en vul hem in.

Getal	Kwadraat
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

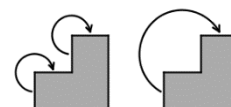
Getal	Kwadraat
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

- Geef alle kwadraten die bestaan uit 3 cijfers.
- In dit kruiswoordraadsel moet op elke open plaats een cijfer ongelijk aan 0 en 3 worden ingevuld. Alle "woorden" van drie cijfers moeten kwadraten zijn van positieve getallen. Neem het kruiswoordraadsel over in je schrift en vul het in.  
 Let op: drie kwadraten moet 2 keer ingevuld worden en één kwadraat zelfs 3 keer.  
 Verder komen de kwadraten van 23 en 28 niet voor, alle andere kwadraten van 3 cijfers zonder 0 en 3 komen wel voor.


Fibonacci was een Italiaanse wiskundige die leefde van ca 1170 tot ca 1250 n.C. Eigenlijk heette hij Leonardo Pisano, maar hij is bekender onder de naam Fibonacci. Fibonacci is erg belangrijk voor de cijfers zoals wij die nu gebruiken, omdat hij de Arabische cijfers, inclusief de nul, bestudeerde en zich realiseerde dat die veel handiger waren dan de Romeinse cijfers die tot dan toe in Europa gebruikt werden. Hij schreef er een boek over, Liber Abaci, waardoor het Arabische cijferstelsel ook in Europa bekend werd en gebruikt ging worden.

Deze opdracht gaat echter niet over cijferstelsels, maar over traplopen. Fibonacci had een trap in zijn huis met 13 treden. Door soms stappen van 1 trede en soms stappen van 2 treden te nemen, kon hij op heel veel manieren de trap oplopen. Fibonacci beweerde dat hij het langer dan een jaar kon volhouden om iedere avond op een andere manier de trap op te lopen. We gaan dat in deze opdracht eens onderzoeken. We spreken af dat we in deze opdracht alleen stappen van 1 trede of van 2 treden nemen.

Je kunt een trapje met twee treden op twee verschillende manieren oplopen:



1. Hoeveel manieren zijn er voor een trapje van drie treden?
2. Laat zien dat er 5 verschillende manieren zijn voor een trapje van vier treden.
3. Teken alle manieren voor een trapje van vijf treden.

Je ziet dat het aantal mogelijkheden best snel oploopt. Het is veel werk om alles te tekenen en bovendien wil je graag zeker weten dat je alle mogelijkheden hebt en er niet per ongeluk een ge mist hebt of dubbel getekend hebt. Dit vraagt om een meer systematische aanpak!

We gaan de manieren niet meer tekenen, maar opschrijven. Een stap van 1 trede, geef je aan met een 1, een stap van 2 treden met een 2.

4. Vul de tabel aan voor een trap met 5 treden.

Trap met	Mogelijkheden
1 trede	1
2 treden	11, 2
3 treden	111, 12, 21
4 treden	1111, 112, 121, 211, 22
5 treden	

5. Je ziet dat de voorgedrukte rijtjes in "alfabetische" volgorde staan. Leg uit wat hier met "alfabetisch" bedoeld wordt en schrijf jouw rijtjes bij 5 treden ook alfabetisch op als je dat niet al gedaan had.
6. Schrijf ook de rijtjes bij 6 treden in alfabetische volgorde op.
7. Zie je al een bepaald systeem om de rijtjes makkelijk allemaal te vinden? Leg het systeem uit en leg ook uit waarom het werkt.  
 Bekijk de volgende tip als je het systeem niet kunt vinden:

Vergelijk de rijtjes die met een 1 beginnen met de rijtjes met één trede minder en vergelijk de rijtjes die met een 2 beginnen met de rijtjes met twee treden minder.

8. Ga nu na of de bewering van Fibonacci dat hij meer dan een jaar lang iedere avond op een andere manier naar boven kan klopt.
9. Een aantal jaar later kan het zoontje van Fibonacci, inmiddels net 10 jaar oud en nogal een springerig typ, zelfs met drie en vier treden tegelijk naar boven. Onderzoek of het jongetje tot hij op zijn 18<sup>e</sup> uit huis gaat iedere avond op een andere manier naar boven kan.

Onderstaande puzzel lijkt op een woordzoeker, maar je zoekt er geen woorden, maar sommen. Er zijn er twee voorgedaan. Zoals je ziet moet je zelf de operatoren (+,-,x,:) en de = toevoegen.

- Zoek zelf nog minstens 25 andere sommen.
- Lukt het je om minder dan 30 hokjes over te houden?
- Wat is de langste som die je kunt vinden?

10:	11	3	3	99	1	1	0	5	5	5	125	3	13
6	2=	1	12	3	21	7	2	12	7	84	7	6	15
7	7	5	4	15	2	13	2	13	120	21	28	12	5
2	22	42	2	5 x	7 =	35	2	14	5	24	7	72	39
5	2	7	32	31	1	0	2	182	4	2	4	8	11
19	121	11	11	11	88	8	2	14+	3	128	7	14	12
14	23	7	30	14	8	3	32	58-	2	15	16	240	23
4	1	54	7	25	5	3	0	27=	1	29	2	58	12
56	9	3	17	15	1	7	11	45	18	7	8	56	4
6	35	76	19	4	3	4	2	4	24	6	6	5	3
18	2	1	17	2	3	4	5	7	4	6	3	2	11
18	8	144	12	1	2	3	4	5	3	15	3	8	24

Een Egyptisch vraagstuk van zo'n 4000 jaar geleden luidt: Hoe moeten drie broden eerlijk worden verdeeld onder 5 arbeiders?

1. Hoe zou jij dit probleem oplossen?

Waarschijnlijk heb jij gezegd dat je alle broden in 5 stukken deelt en dan iedere arbeider 3 stukken geeft, dus in totaal  $\frac{3}{5}$  brood. Of misschien zag je wel meteen dat ieder  $\frac{3}{5}$  brood zou krijgen en gaf je de eerste dus  $\frac{3}{5}$  deel van het eerste brood, de tweede de rest van het eerste brood plus nog  $\frac{1}{5}$  deel van het tweede brood, enz.

De Egyptenaren deden het anders dan jij het deed. Egyptenaren gebruikten bij breuken met een noemer van 4 of groter alleen maar breuken met een "1" in de teller, *stambreuken* noemen we dat. Ze gebruikten dus wel  $\frac{2}{3}$ , maar niet  $\frac{3}{5}$ . Als ze een breuk wilden gebruiken die geen stambreuk was, schreven ze de breuk als de som van 2 of meer *verschillende(!)* stambreuken. De Egyptenaren schreven een breuk als een soort oogje met daaronder zoveel streepjes als de noemer groot was. Ze schreven bijv.  $\frac{3}{4}$  als  $\overset{\circ}{\text{II}} \overset{\circ}{\text{IIII}}$ , nl.  $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ .

2. De Egyptenaren schreven breuk  $\frac{3}{5}$  dus als de som van twee stambreuken, nl.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ . Laat door de breuken gelijknamig te maken zien dat  $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$  inderdaad gelijk is aan  $\frac{3}{5}$ .
3. Als je weet dat zij  $\frac{3}{5}$  als  $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$  zagen, hoe zullen zij de broden dan zijn gaan verdelen?
4. Schrijf  $\frac{5}{8}$  als de som van 2 stambreuken.
5. Hoe zouden de Egyptenaren 5 broden onder 8 arbeiders verdelen?
6. Splits in twee verschillende stambreuken:

$$\begin{array}{lll} \frac{3}{4} = + & \frac{10}{21} = + & \frac{5}{24} = + \\ \frac{5}{6} = + & \frac{2}{5} = + & \frac{7}{30} = + \\ \frac{7}{10} = + & \frac{2}{7} = + & \frac{7}{12} = + \end{array}$$

7. De breuken in het laatste rijtje van opgave 6 kun je ook op een andere manier in twee stambreuken splitsen. Zoek voor iedere breuk nog een andere manier dan je in opgave 6 gevonden hebt.
8. Bedenk zelf nog een andere breuk die je op meerdere manieren in twee stambreuken kunt splitsen.
9. Vaak zijn er voor een splitsing meer dan twee stambreuken nodig. Schrijf de volgende breuken als een som van stambreuken:  $\frac{8}{9}$ ,  $\frac{9}{10}$ ,  $\frac{99}{100}$  en  $\frac{999}{1000}$ .

Als je een breuk in stambreuken wilt splitsen kun je als volgt te werk gaan:

- a) Trek de grootste stambreuk die in je breuk past van je breuk af
  - b) Is je de breuk die je overhoudt een stambreuk?
    - Ja -> klaar
    - Nee -> ga naar a)
10. Splits op deze manier de breuken  $\frac{8}{9}$ ,  $\frac{7}{11}$  en  $\frac{15}{16}$  in stambreuken.
  11. Leg uit dat je op deze manier ook altijd een splitsing in verschillende stambreuken krijgt. Lukt het niet om dit uit te leggen? Probeer dan maar eens een splitsing te maken met dezelfde stambreuken, bijv. door  $\frac{5}{9}$  te splitsen, dan merk je vast wel waarom je er niet twee keer  $\frac{1}{9}$  in krijgt.

Op de school van Arnoud en Anneke wordt over een maand een actiedag voor het goede doel gehouden. Alle kinderen helpen mee om acties te bedenken. Arnoud en Anneke gaan een loterij organiseren, waarmee leuke geldprijzen te winnen zijn. De opbrengst van de verkochte loten die over is na het uitkeren van de prijzen, gaat naar het goede doel.

Arnoud wil de hoogte van de geldprijs laten afhangen van het lotnummer en daarbij uitgaan van de deelbaarheid. Is het lotnummer deelbaar door 1, dan krijg je 1 euro, is het deelbaar door 2, dan krijg je 2 euro. Dit gaat zo door tot en met delen door 10. Het deelbaar zijn door getallen groter dan 10 levert geen extra winst meer op. Iemand die bijvoorbeeld lotnummer 15 heeft, krijgt in 9 euro, immers 15 is deelbaar door 1, 3 en 5.

1. Bereken welke uitbetaling hoort bij lotnummer 7, 11, 24 en 81.

Arnoud en Anneke willen uiteraard een aardig bedrag binnenhalen voor het goede doel. Hoe duur moeten ze de loten nu maken? Anneke stelt een prijs voor van 10 euro per stuk.

2. Neem de tabel over in je schrift en vul hem verder in. Schrijf je berekeningen onder de tabel in je schrift.

Lotnummer	6	12	17	32
Uitbetaling				
Winst voor de koper				

3. Welke van de lotnummers 1 tot en met 20 leveren de grootste winst voor het goede doel op? Wat zijn dit voor een getallen? Hoeveel is die winst?
4. Wel lotnummer van de lotnummers 1 tot en met 20 levert de grootste winst voor de koper van het lot op? Hoe groot is de winst? Leg uit waarom juist dat nummer zoveel winst oplevert?
5. Wat is de grootste winst voor de koper bij de eerste 100 loten? (nummers 1 tot en met 100)
6. Wat is het hoogste bedrag dat je bij deze loterij kunt winnen? Hoeveel loten moeten er dan minimaal gemaakt worden?

Het is veel werk om voor ieder lot te kijken wat de uitbetaling is. Je kunt beter kijken hoe vaak iedere deler in je loten voorkomt en daarmee uit te rekenen wat de uitbetaling is.

7. Vul in de tabel in hoeveel getallen er zijn die het getal in de bovenste rij als deler hebben.

Deler	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
In 1 t/m 10										
In 1 t/m 100										
In 1 t/m 10000										

8. Welk bedrag gaat er naar het goede doel als lot 1 t/m 10 verkocht wordt?
9. Welk bedrag als lot 1 t/m 100 verkocht wordt?
10. En welk bedrag als lot 1 t/m 10000 verkocht wordt?
11. Is 10 euro een goede prijs of zou jij een andere prijs voorstellen? Of zou je nog een ander advies willen geven?

Het systeem van Arnoud en Anneke blijkt niet de opbrengst op te leveren waar ze op hoopen. Er zal een systeem bedacht moeten worden dat meer oplevert.

Klasgenoten Bernd en Bea redeneren dat het probleem bij het systeem van Arnoud en Anneke is dat er teveel getallen met veel delers zijn. Zij hebben een systeem bedacht waarbij juist loten met een lotnummer dat een priemgetal is, een prijs krijgen. Een priemgetal is een getal met precies twee delers, namelijk 1 en het getal zelf.

12. Noem drie priemgetallen.
13. Leg uit dat het getal 1 geen priemgetal is.

Deelnemers die een lotnummer hebben dat een priemgetal is, krijgen als uitbetaling precies zoveel euro als het lotnummer.

14. Bereken hoeveel geld naar het goede doel gaat als lotnummer 1 t/m 50 verkocht wordt voor 10 euro per stuk volgens het systeem van Bernd en Bea.

Klasgenoten Cesar en Cornelia bedachten een systeem waarbij het juist weer wel gunstig is om een lotnummer met veel delers te hebben. Bij hen moet je je lotnummer als product van zoveel mogelijk getallen schrijven. Een getal mag vaker gebruikt worden, alleen het getal 1 mag natuurlijk niet gebruikt worden. Je uitbetaling is het aantal getallen in de vermenigvuldiging. Zo krijg je bijvoorbeeld als je lotnummer 24 hebt 4 euro uitbetaald, want  $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$  en heeft dus 4 delers.

15. Waarom telt het getal 1 niet mee?
16. Vergelijk het systeem van Bernd en Bea met dat van Cesar en Cornelia en leg uit welk systeem het beste gekozen kan worden als je zoveel mogelijk geld naar het goede doel wilt laten gaan. Schrijf een advies voor de klas en licht je advies toe met berekeningen (bijv. voor 50 of 100 loten).

1. Bekijk de getallen 12 en 20.
  - a) Schrijf de delers van 12 op van klein naar groot.
  - b) Schrijf de delers van 20 op van klein naar groot.
  - c) Welke getallen zijn zowel deler van 12 als van 20?

De getallen uit **1c)** zijn de *gemeenschappelijke delers* van 12 en 20. De grootste van deze gemeenschappelijke delers noemen we de *grootste gemene deler*. We korten dit af tot *GGD* en schrijven dit als  $\text{ggd}(12, 20) = 4$ .

2. Bepaal de volgende grootste gemene delers:
  - a)  $\text{ggd}(70, 36) =$
  - b)  $\text{ggd}(96, 128) =$

In plaats van naar gemeenschappelijke delers van getallen, kunnen we ook naar gemeenschappelijke veelvouden kijken.

3. We kijken weer naar de getallen 12 en 20.
  - a) Geef van beide getallen zes veelvouden.
  - b) Geef zes getallen die zowel van 12 als van 20 een veelvoud zijn.
  - c) Wat is het kleinste veelvoud van 12 en 20 (groter dan 0)?

Het kleinste veelvoud van 2 getallen, dat groter is dan 0, noemen we het *kleinste gemene veelvoud*. We korten dit af tot *KGV* en schrijven dit in het geval hierboven als  $\text{kgv}(12, 20) = 60$ .

4. Neem de tabel over in je schrift en vul hem in.

$a$	$b$	$\text{ggd}(a, b)$	$\text{kgv}(a, b)$	$\text{ggd}(a, b) \cdot \text{kgv}(a, b)$	$a \cdot b$
3	8				
6	15				
16	24				
70	35				
75	45				
60	84				

5. Wat valt je op?

Om te verklaren waarom kennelijk het product van twee getallen gelijk is aan het product van hun grootste gemene deler en hun kleinste gemene veelvoud, kijken we naar de *priemfactorontbinding* van de getallen. Op opdrachtkaart 1 heb je geleerd dat priemgetallen getallen zijn die alleen door 1 en door zichzelf deelbaar zijn. Een getal dat niet priem is, heet *samengesteld* en kun je schrijven als een product van kleinere getallen. Die kleinere getallen zijn of priem of samengesteld. Als ze samengesteld zijn, kun je ze weer schrijven als een product van kleinere getallen. Dit gaat net zo lang door tot je een product hebt van alleen priemgetallen. Dit product van alleen priemgetallen het de *priemfactorontbinding* van het getal waar je mee begon. Dus:  $48 = 6 \cdot 8 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ .

6. We gaan de priemfactorontbinding van 60 maken.
  - a) Schrijf 60 als product van 2 kleinere getallen.
  - b) Schrijf de samengestelde kleinere getallen weer als producten van kleinere getallen. Ga door tot alle getallen priem zijn.
  - c) Geef nu de priemfactorontbinding van 60.

We spreken af dat we voortaan de getallen in de priemfactorontbinding opschrijven van klein naar groot, dus  $48 = 6 \cdot 8 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

We gaan nu kijken hoe de priemfactorontbinding ons kan helpen te begrijpen waarom het product van twee getallen gelijk is aan het product van hun grootste gemene deler en hun kleinste gemene veelvoud.

7. Neem over en vul in:

	Priemfactorontbinding
6	
15	
$\text{ggd}(6,15)$	
$\text{kgv}(6,15)$	
$\text{ggd}(6,15) \cdot \text{kgv}(6,15)$	
$6 \cdot 15$	

	Priemfactorontbinding
16	
24	
$\text{ggd}(16,24)$	
$\text{kgv}(16,24)$	
$\text{ggd}(16,24) \cdot \text{kgv}(16,24)$	
$16 \cdot 24$	

	Priemfactorontbinding
60	
84	
$\text{ggd}(60,84)$	
$\text{kgv}(60,84)$	
$\text{ggd}(60,84) \cdot \text{kgv}(60,84)$	
$60 \cdot 84$	

8. Leg uit waarom het product van twee getallen gelijk is aan het product van hun grootste gemene deler en hun kleinste gemene veelvoud.

Tip: als je niet ziet waarom het zo is, kun je de priemfactorontbinding van de grootste gemene deler in iedere regel kleuren (let op: in de laatste twee regels van iedere tabel komt hij steeds twee keer voor!), dat helpt je misschien om een idee te krijgen.

1. Vijf paarden en twee koeien kosten € 3800,00. Twee paarden en vijf koeien kosten € 3200,00.  
Hoeveel kost een paard en hoeveel kost een koe?
2. Een koffiebrander heeft twee soorten koffie, Arabica en Robusta. Arabica kost € 20,00 per kilo, Robusta € 10,00 per kilo.  
In welke samenstelling zou 1 kilo gemengde Arabica en Robusta € 16,00 kosten?
3. Een leeuw doet er 3 uur over om een schaap te verorberen. Een luipaard doet daar 4 uur over en een beer 6 uur.  
Hoe lang doen één leeuw, één luipaard en één beer er gezamenlijk over om één schaap te verslinden?
4. Stel dat je de getallen 1 t/m 1000000 zou opschrijven.  
Hoe vaak heb je dan het cijfer "4" gebruikt?
5. Peter wordt iedere middag om 14.25 uur door zijn moeder van school gehaald. Op een dag is Peter al om 13.25 uur vrij en besluit hij vast zelf richting huis te gaan lopen. Onderweg komt hij zijn moeder tegen en rijdt hij het laatste stuk met haar mee naar huis. Peter is 10 minuten eerder thuis dan normaal. We nemen aan dat zijn moeder op de heen- en terugreis met een constante snelheid rijdt.  
Hoe lang heeft Peter gelopen voor hij zijn moeder tegenkwam?
6. In het kippenhok van onze burens zitten kippen en konijnen. Samen (de kippen en de konijnen, niet de burens) hebben ze 30 poten en 9 koppen. Iedere kip legt 6 eieren per week.  
Hoeveel eieren kunnen onze burens wekelijks rapen?
7. Op een eiland in de Stille Oceaan wonen een man, een vrouw en hun dochttertje. Op een goede dag waren ze naar het strand gegaan en hadden ze een berg schelpen verzameld, die ze de volgende dag zouden verdelen. Het waren er heel veel, wel tussen de 200 en 300. Midden in de nacht staat het dochttertje op. Ze sluipt naar de stapel en verdeelt deze in drieën. Na het verdelen blijft er echter één schelp over. Deze schelp gooit ze terug in zee, ze verstopt haar stapel en veegt de andere twee stapels weer bij elkaar.  
Niet veel later wordt haar vader wakker. Hij besluit zijn portie maar vast te verbergen. Hij verdeelt de stapel in drieën. Bij het verdelen blijft er één schelp over. Deze gooit hij in zee. Dan pakt hij één stapel, verstopt deze en legt de schelpen van de andere twee stapels weer bij elkaar.  
Tegen de ochtend wordt de moeder wakker. Ze krijgt hetzelfde idee als haar dochter en haar man. Ze verdeelt de stapel in drieën, hierbij gooit ze de ene overgebleven schelp in zee en verstopt haar deel.  
De volgende ochtend, toen iedereen wakker was, gingen ze de overgebleven schelpen verdelen. Toen ze de stapel in drieën deelden, bleef er één schelp over, die ze in de zee gooiden.  
Hoeveel schelpen hadden ze samen verzameld?
8. We hebben een stapel van minder dan 1000 appels die verpakt moet worden. Als we pakken van 6, 7, 8 of 10 appels maken, houden we er altijd 3 over.  
Hoeveel appels hebben we?
9. Op 1 januari 1997 zegt meneer A tegen meneer B: "Vandaag is mijn leeftijd gelijk aan de som van de cijfers in mijn geboortjaar". Na lang nadenken schudt B de hand van A en feliciteert hem met zijn verjaardag.  
Wanneer is A geboren?

Als we het getal 70674 op schrijven, staat daar twee keer het cijfer "7" in, maar het betekent niet allebei de keren hetzelfde.

1. Wat betekent de eerste 7 en wat betekent de tweede 7?
2. 0 is eigenlijk niks, waarom is het toch belangrijk dat we de 0 in het getal 70674 opschrijven?

Met het getal 70674 bedoelen we dus eigenlijk  $7 \cdot 10000 + 0 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 4 \cdot 1$ . De getallen 10000, 1000, 100, 10 en 1 kunnen we schrijven als machten van 10:

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 1 \cdot 10 = 10$$

$$10^2 = 1 \cdot 10 \cdot 10 = 100$$

$$10^3 = 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$

$$10^4 = 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$$

Je zou dus ook kunnen zeggen  $75674 = 7 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$ .

3. Schrijf het getal 8730378 zoals hierboven als de som van een aantal machten van 10.

Wij rekenen gewoonlijk 10-talig, dat wil zeggen dat de plek van een cijfer in een getal aangeeft hoe vaak een bepaald macht van 10 meetelt in een getal. Je zou ook 2-talig kunnen rekenen. Een ander woord voor 2-talig is *binair*. Je neemt dan niet machten van 10, maar machten van 2 om de waarde van een cijfer in een getal te bepalen.

4. Vul in en maak de rij af tot  $2^{10}$ :

$$2^0 = 1$$

$$2^1 = 1 \cdot 2 = 2$$

$$2^2 = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$$

$$2^3 = 1 \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots = \dots$$

$$2^4 = \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots = \dots$$

⋮

5. Wat is het grootste cijfer dat in een getal dat 10-talig geschreven is voor kan komen? Waarom is dat zo? (Omdat we geen grotere cijfers hebben, is niet het goede antwoord!)
6. Wat zou het grootste cijfer zijn dat in een getal dat 2-talig geschreven is voor kan komen? Waarom is dat zo?
7. Schrijf de volgende tweetallige getallen om naar de tientallige schrijfwijze:
  - a.  $10011 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$
  - b.  $11111 =$
  - c.  $10101 =$
8. Schrijf de tientallige getallen van 1 t/m 20 tweetalig op.
9. Maak de volgende optellingen in het tweetalig stelsel:

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \hline \end{array}$$

1. Speel het volgende spelletje drie keer, steeds met een ander begingetal.
  - Neem een getal van twee verschillende cijfers.
  - Verwissel beide cijfers, zodat je een nieuw getal krijgt.
  - Trek nu de kleinste van de twee getallen van de grootste af.
  - Verwissel de cijfers van de uitkomst.
  - En trek weer de kleinste van de grootste af.
  - Ga hiermee door tot je een getal van één cijfer hebt.
  - Welk getal heb je gekregen?
2. Kreeg je steeds hetzelfde getal op het eind?
3. Misschien heb je gemerkt dat er getallen zijn, waarbij je al na één stap klaar bent. Welke getallen zijn dat?
4. Leg uit waarom je steeds op hetzelfde getal uitkomt.
5. We maken het spelletje iets moeilijker. Speel deze variant ook weer drie keer, uiteraard steeds met een ander begingetal.
  - Kies een getal met drie cijfers die niet allemaal hetzelfde zijn.
  - Schrijf het getal nu van achterstevoren en trek het kleinste getal van het grootste getal af.
  - Schrijf de uitkomst ook weer achterstevoren en trek de kleinste van de grootste af.
  - Ga hiermee door tot je uitkomst niet meer verandert.
  - Met welk getal eindig je?
6. Leg uit dat de uitkomst na één keer aftrekken altijd deelbaar is door 99.
7. Welke uitkomsten zijn er uiteindelijk mogelijk? Leg uit wanneer je welke uitkomst krijgt en waarom.
8. Onderzoek voor het volgende spelletje welke uitkomsten er mogelijk zijn en leg uit waarom juist die uitkomsten mogelijk zijn.
  - Neem een getal van twee cijfers.
  - Plaats een nul achter dat getal.
  - Trek het oorspronkelijke getal van je nieuwe getal af.
  - Tel de cijfers van de uitkomst op.
  - Welk getal heb je nu?
9. Uit het volgende spelletje komt altijd hetzelfde antwoord. Zoek uit waarom.
  - Neem een getal in je hoofd.
  - Vermenigvuldig dit getal met 5.
  - Doe er 10 bij.
  - Neem nu 60% van de uitkomst.
  - Deel wat je over hebt door 3.
  - Trek het getal dat je helemaal in het begin had, ervan af.
  - Welk getal heb je nu?
10. Verzin zelf ook een rekenspelletje waar steeds hetzelfde getal uitkomt. Ruil daarna met een klasgenoot en zoek uit hoe het spelletje van de ander werkt.