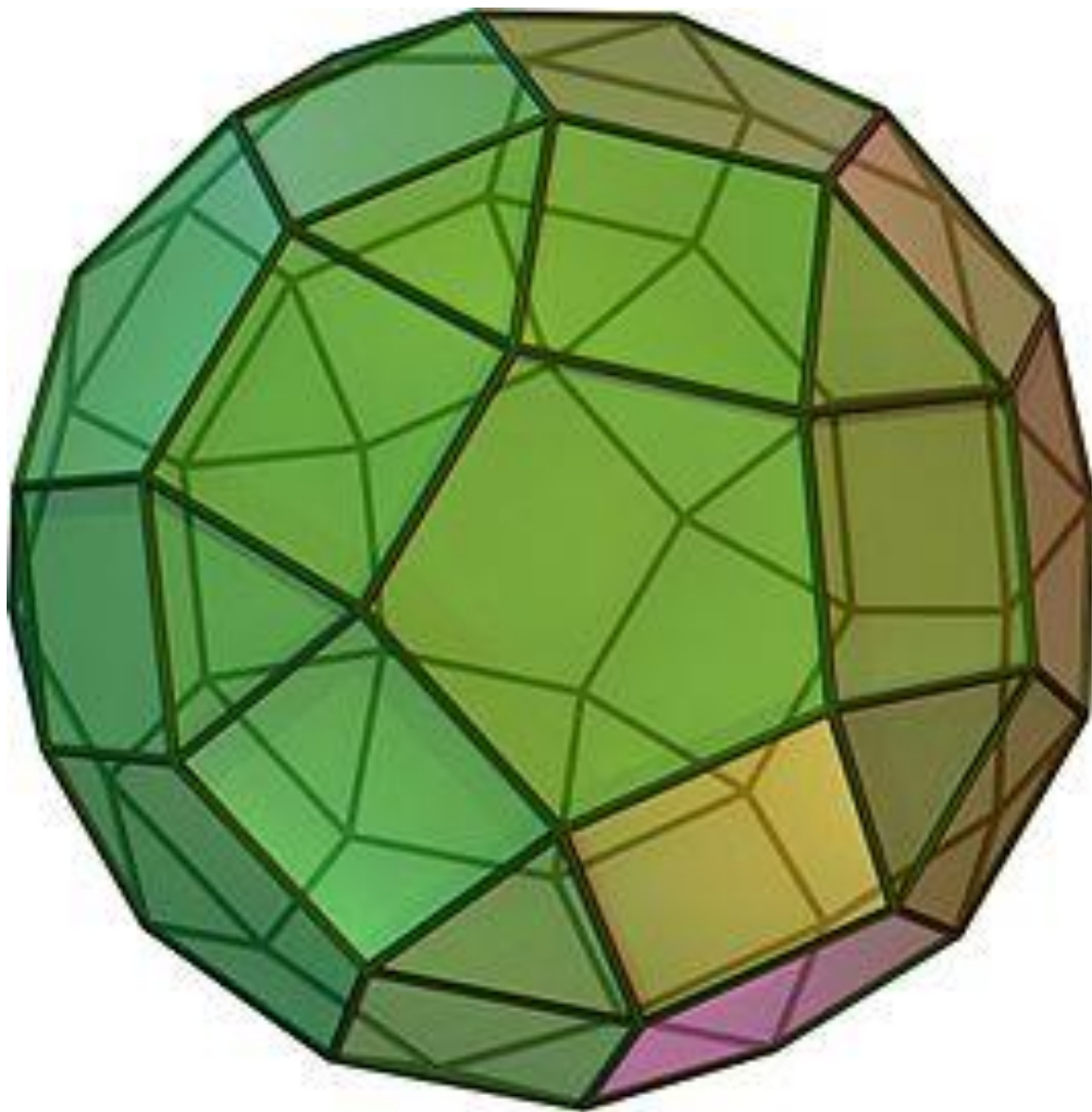


Platonische en Archimedische Veelvlakken

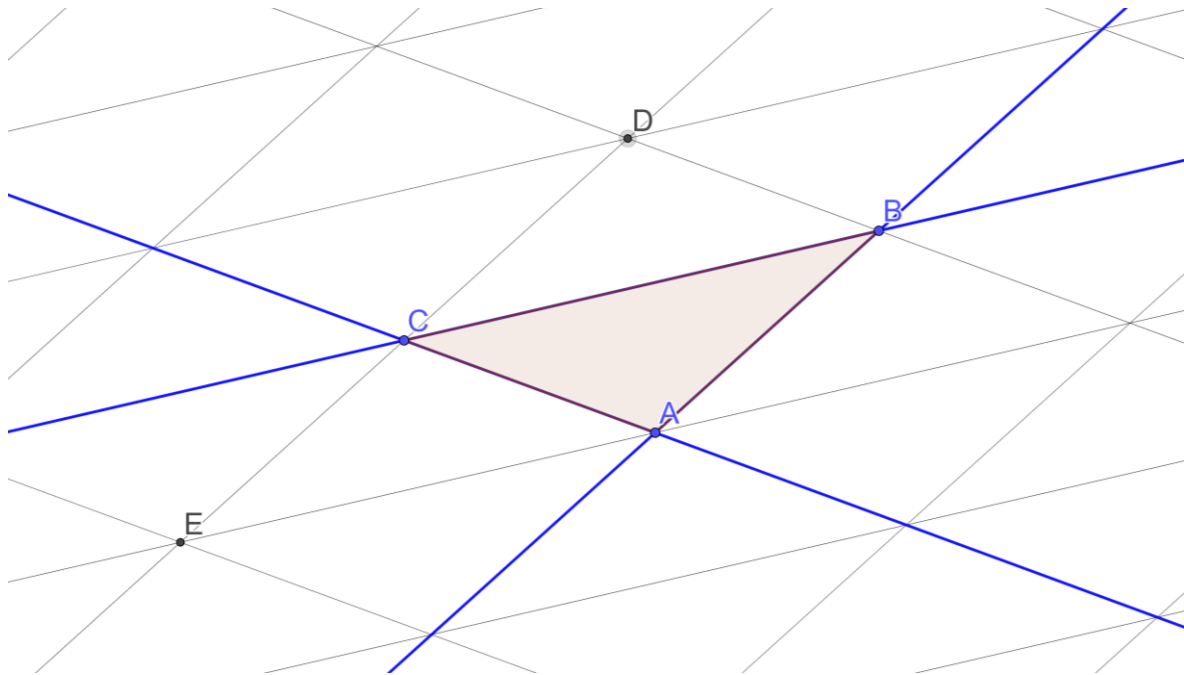


Naam:.....

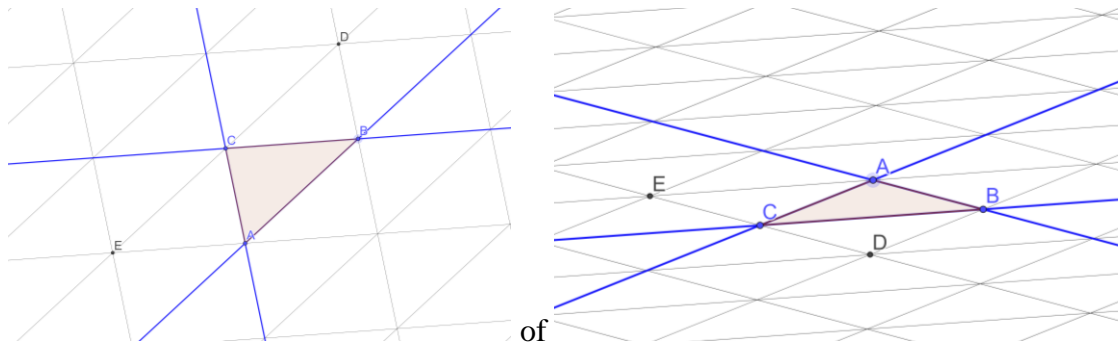
Werkblad hoekensom driehoek

In dit werkblad gaan we onderzoeken hoe groot de hoeken van een driehoek bij elkaar zijn.

In dit driehoekenrooster zitten veel hoeken die even groot zijn.



- Kleur hoek A in driehoek ABC blauw.
- Kleur hoek B in driehoek ABC rood.
- Kleur hoek C in driehoek ABC groen.
- Kleur alle hoeken rond A , B , C , D en E die even groot zijn als hoek A in de driehoek blauw.
- Kleur alle hoeken rond A , B , C , D en E die even groot zijn als hoek B in de driehoek rood.
- Kleur alle hoeken rond A , B , C , D en E die even groot zijn als hoek C in de driehoek groen.
- Wat weet je over het aantal graden rond een punt?
- Vul aan: 2 blauwe hoeken $+ 2$ rode hoeken $+ 2$ groene hoeken $= \dots\dots\dots^\circ$
- Vul aan: 1 blauwe hoek $+ 1$ rode hoek $+ 1$ groene hoek $= \dots\dots\dots^\circ$
- Stel dat we een driehoek hadden gekozen die er anders uitzag dan onze driehoek ABC , dan zouden we er toch weer zo'n rooster met driehoeken omheen kunnen maken\;



In deze roosters zou je de hoeken weer zo kunnen kleuren als je in onderdeel a) t/m f) hebt. Leg uit dat er dan voor de hoeken hetzelfde geldt als je in onderdeel i) en j) hebt gevonden.

In deze roosters geldt ook dat 1 blauwe hoek + 1 rode hoek + 1 groene hoek =°,

omdat

.....

.....

.....

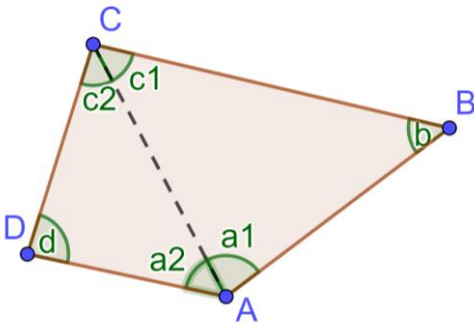
We hebben nu ons eerste wiskundige bewijs geleverd:

1. Bij een driehoek kunnen we altijd een rooster maken, waarin 6 van die driehoeken rond een punt bij elkaar komen.
2. De 6 hoeken van de driehoeken die bij het punt bij elkaar komen, zijn dus samen 360° .
3. Deze 6 hoeken zijn precies 2 keer elke hoek van de driehoek.
4. Dus zijn de hoeken van een driehoek bij elkaar altijd de helft van 360° , dus 180° .

Werkblad hoekensom veelhoeken en hoeken regelmatige veelhoeken

We hebben gezien dat de hoekensom van een driehoek altijd 180° is. In dit werkblad gaan we onderzoeken hoe groot de hoekensom van andere veelhoeken is. Ook gaan we onderzoeken hoe groot de hoeken van regelmatige veelhoeken zijn.

Een vierhoek kunnen we verdelen in twee driehoeken en een vijfhoek in drie driehoeken:



Opgave 1

We kijken eerst naar de vierhoek. Vul aan:

- $a_1 + b + c_1 = \dots\dots\dots^\circ$
- $a_2 + d + c_2 = \dots\dots\dots^\circ$
- $a_1 + b + c_1 + a_2 + d + c_2 = \dots\dots\dots^\circ$
- De hoekensom van een vierhoek is dus $\dots\dots\dots^\circ$

Opgave 2

- Hoeveel graden is de hoekensom van de hoeken van elke driehoek in de vijfhoek? $\dots\dots^\circ$
- Hoeveel graden is de hoekensom van een vijfhoek dus altijd? $3 \times \dots\dots^\circ = \dots\dots^\circ$

Opgave 3

- In hoeveel driehoeken kun je een zeshoek verdelen? $\dots\dots$
- Wat zal dus de hoekensom van een zeshoek zijn? $\dots\dots \times \dots\dots^\circ = \dots\dots^\circ$

Opgave 4

- In hoeveel driehoeken kun je een twaalfhoek verdelen? $\dots\dots$
- Wat zal dus de hoekensom van een twaalfhoek zijn? $\dots\dots \times \dots\dots^\circ = \dots\dots^\circ$

Opgave 5

- a) Als je een veelhoek hebt met een bepaald aantal hoeken, hoe reken je dan uit in hoeveel driehoeken je hem kunt verdelen?
- b) En hoe reken je dan uit wat de hoekensom van die veelhoek is?

Opgave 6

- a) Wat zou er met een n -hoek bedoeld worden?
- b) Leg uit dat je een n -hoek in $n - 2$ driehoeken kunt verdelen.
- c) Leg uit waarom de hoekensom van een n -hoek $(n - 2) \times 180^\circ$ is.

Bij een regelmatige veelhoek zijn alle hoeken even groot.

Opgave 7

- a) In een regelmatige driehoek zijn alle hoeken $180^\circ : 3 = \dots\dots^\circ$
- b) In een regelmatige vierhoek zijn alle hoeken $\dots\dots^\circ : \dots\dots = \dots\dots^\circ$
- c) In een regelmatige vijfhoek zijn alle hoeken $\dots\dots^\circ : \dots\dots = \dots\dots^\circ$
- d) In een regelmatige zeshoek zijn alle hoeken $\dots\dots^\circ : \dots\dots = \dots\dots^\circ$
- e) In een regelmatige twaalfhoek zijn alle hoeken $\dots\dots^\circ : \dots\dots = \dots\dots^\circ$
- f) In een regelmatige n -hoek zijn alle hoeken $(\dots\dots - \dots\dots) \times \dots\dots^\circ : \dots\dots$

Werkblad Platonische veelvlakken

Platonische veelvlakken zijn regelmatige veelvlakken. Ze voldoen aan de volgende voorwaarden:

- Alle grensvlakken hebben dezelfde vorm
- Alle ribben zijn even lang
- In ieder hoekpunt komen evenveel grensvlakken bij elkaar
- In ieder hoekpunt komen evenveel ribben bij elkaar

Deze veelvlakken waren al bekend in de oudheid. De Griekse filosoof (“denker”) Plato kende ze al. Plato leefde in de 4e eeuw voor Christus. Net als een andere Griekse denker voor hem, Empedocles (490 – 430 v.C.), geloofde Plato dat de Goden de hele wereld had opgebouwd uit vier basiselementen: aarde, water, vuur en lucht. De rest van de ruimte om ons heen (“daar waardoor licht zich voortplant”) noemde men “aether”.

Plato maakte de volgende koppelingen tussen de veelvlakken en de basiselementen :

- Regelmatig viervlak (tetraëder, bestaat uit 4 driehoeken): vuur
- Regelmatig zesvlak (kubus, bestaat uit 6 vierkanten): aarde
- Regelmatig achthoek (octaëder, bestaat uit 8 driehoeken): lucht
- Regelmatig twaalfvlak (dodecaëder, bestaat uit 12 vijfhoeken): aether
- Regelmatig twintigvlak (isocaëder, bestaat uit 20 driehoeken): water

Plato dacht al dat er maar precies vijf van zulke “volmaakte” ruimtelijke vormen bestaan.

Met wat handig gepuzzel en wat slim redeneren kun je dat inderdaad bewijzen en dat is precies wat we in dit werkblad gaan doen.

Opgave 1: Tetraëder

Een tetraëder bestaat uit 4 driehoeken en in elk hoekpunt komen 3 driehoeken bij elkaar.

- a) Hoe groot is een hoek van een regelmatige driehoek?
- b) Hoeveel graden zijn dus de hoeken van de drie driehoeken die in één hoekpunt tegen elkaar komen bij elkaar?
- c) Hoeveel zijden hebben de 4 driehoeken bij elkaar?
- d) In de tetraëder liggen steeds 2 zijden van een driehoek tegen elkaar, we noemen dit een *ribbe*. We hebben in onderdeel c) berekend dat de 4 driehoeken bij elkaar ... zijden hebben. Als steeds 2 zijden samen een ribbe vormen, hoeveel ribben heeft de tetraëder dan dus?
- e) We kunnen bovenstaande berekening wiskundig opschrijven: $4 \times 3 : 2 = 6$.
Leg voor ieder getal uit wat het betekent, dus: “de eerste 4 is het aantal driehoeken, de eerste 3 is ..., dan deel je door 2 want vormen samen steeds een ribbe en dan heb je dus in de tetraëder.
- f) Hoeveel hoeken hebben de vier driehoeken bij elkaar?
- g) In elk hoekpunt van de tetraëder komen 3 hoeken van de driehoeken bij elkaar.
Hoeveel hoekpunten heeft de tetraëder dus?
- h) Ook deze berekening kunnen we wiskundig opschrijven. Vul in: $\dots \times \dots : \dots = \dots$

Opgave 2: Octaëder

Een octaëder bestaat uit 8 driehoeken en in elk hoekpunt komen 4 driehoeken bij elkaar.

- a) Hoeveel graden zijn de hoeken van de vier driehoeken die in één hoekpunt tegen elkaar komen bij elkaar?
- b) Bereken hoeveel ribben de octaëder heeft. Tip: kijk in de vorige opgave hoe je de berekening wiskundig opschrijft! De uitleg in woorden hoeft er niet bij.
- c) Bereken hoeveel hoekpunten de octaëder heeft. Schrijf je berekening weer wiskundig op.

Opgave 3: Icosaëder

Een icoesaëder bestaat uit 20 driehoeken en in elk hoekpunt komen 5 driehoeken bij elkaar.

- a) Hoeveel graden zijn de hoeken van de vijf driehoeken die in één hoekpunt tegen elkaar komen bij elkaar?
- b) Bereken hoeveel ribben de icoesaëder heeft.
- c) Bereken hoeveel hoekpunten de icoesaëder heeft.

Opgave 4: Meer driehoeken rond één punt

- a) Stel dat er een Platonisch veelvlak zou zijn met zes regelmatige driehoeken in één punt zou zijn, hoeveel graden zouden de hoeken van de zes driehoeken die in één hoekpunt bij elkaar komen dan samen zijn?
- b) Waarom kan dat niet in een Platonisch veelvlak?
- c) Stel dat er nog meer regelmatige driehoeken in één hoekpunt bij elkaar zouden komen, wat kun je dan zeggen over de hoekensom rond dat hoekpunt?
- d) Waarom is dat een probleem?

Opgave 5: Kubus

Een kubus bestaat uit 6 vierkanten en in elk hoekpunt komen 3 vierkanten bij elkaar.

- a) Hoeveel graden zijn de hoeken van de drie vierkanten die in één hoekpunt tegen elkaar komen bij elkaar?
- b) Bereken hoeveel ribben de kubus heeft.
- c) Bereken hoeveel hoekpunten de kubus heeft.

Opgave 6: Meer vierkanten rond één punt

Leg uit waarom er geen Platonisch veelvlak met 4 vierkanten rond één hoekpunt kan zijn.

Opgave 7: Dodecaëder

Een dodecaëder bestaat uit 12 vijfhoeken en in elk hoekpunt komen 3 vijfhoeken bij elkaar.

- a) Hoeveel graden zijn de hoeken van de drie vijfhoeken die in één hoekpunt tegen elkaar komen bij elkaar?
- b) Bereken hoeveel ribben de dodecaëder heeft.
- c) Bereken hoeveel hoekpunten de dodecaëder heeft.

Opgave 8: Meer vijfhoeken rond één punt

- a) Leg uit waarom er geen Platonisch veelvlak met 4 vijfhoeken rond één hoekpunt is.
- b) Leg uit waarom er dan ook geen Platonisch veelvlak met meer dan 4 vierkanten rond één hoekpunt kan zijn.

Opgave 9: Zeshoeken, zevenhoeken, enz.

- a) Wat zou er gebeuren als je een Platonisch veelvlak wilt maken met zeshoeken? Licht je antwoord toe met een berekening.
- b) Waarom kun je dan ook geen Platonisch veelvlak maken met veelhoeken met nog meer hoeken?

Opgave 10: Samenvatting

Vul de tabel in:

| Naam | Rond 1 punt | Aantal grensvlakken | Aantal ribben | Aantal hoekpunten |
|------------|--------------|---------------------|---------------|-------------------|
| Tetraëder | 3 driehoeken | | | |
| Octaëder | 4 driehoeken | | | |
| Icosaëder | 5 driehoeken | | | |
| Kubus | 3 vierkanten | | | |
| Dodecaëder | 3 vijfhoeken | | | |

Werkblad berekeningen Archimedisch veelvlak

Binnenkort ga je een Archimedisch veelvlak bouwen. Om te weten hoe hij eruitziet, moet je kunnen berekenen hoeveel grensvlakken van iedere vorm in een hoekpunt bij elkaar komen. We hebben dit in de les samengedaan en je gaat dit nu voor een aantal Archimedische veelvlakken zelf doen. Maar eerst wordt het nog voor één veelvlak voorgedaan.

Voorbeeld

We gaan onderzoeken hoe een Archimedisch veelvlak met 20 driehoeken, 30 vierkanten en 12 vijfhoeken eruitziet.

Stap 1: Bereken het aantal grensvlakken

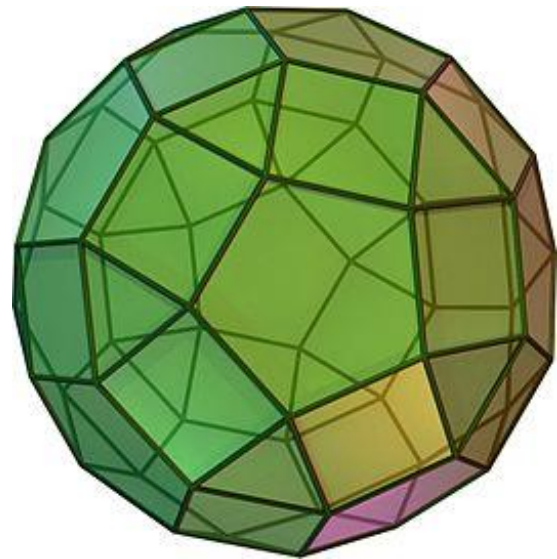
20 driehoeken + 30 vierkanten + 12 vijfhoeken =
 $20 + 30 + 12$ grensvlakken = 62 grensvlakken.

Stap 2: Bereken het aantal ribben

20 driehoeken hebben $20 \cdot 3 = 60$ zijden,
30 vierkanten hebben $30 \cdot 4 = 120$ zijden,
12 vijfhoeken hebben $12 \cdot 5 = 60$ zijden.

Dit zijn bij elkaar $60 + 120 + 60 = 240$ zijden.

2 zijden vormen samen steeds 1 ribbe, dus heeft dit veelvlak $240 : 2 = 120$ ribben.



Stap 3: Bereken het aantal hoekpunten

De formule van Euler zegt “*grensvlakken + hoekpunten – ribben = 2*”.

In dit veelvlak zijn er 62 grensvlakken en 120 ribben. Als je dit invult in de formule van Euler krijg je $62 + H - 120 = 2$. Om dit te laten kloppen moet $62 + H$ gelijk zijn aan 122 en moet het aantal hoekpunten dus wel 60 zijn.

Stap 4: Bepaal voor elke vorm grensvlakken hoeveel er in één hoekpunt bij elkaar komen.

De hoekpunten van de grensvlakken moeten eerlijk verdeeld worden over de 60 hoekpunten van het veelvlak.

20 driehoeken hebben $20 \cdot 3 = 60$ hoekpunten, $60 : 60 = 1$, per hoekpunt van het veelvlak is er dus 1 hoekpunt van een driehoek.

30 vierkanten hebben $30 \cdot 4 = 120$ hoekpunten, $120 : 60 = 2$, per hoekpunt van het veelvlak zijn er dus 2 hoekpunten van vierkanten.

12 vijfhoeken hebben $12 \cdot 5 = 60$ hoekpunten, $60 : 60 = 1$, per hoekpunt van het veelvlak is er dus 1 hoekpunt van een vijfhoek.

Conclusie: In dit veelvlak komen er in ieder hoekpunt één driehoek, twee vierkanten en één vijfhoek bij elkaar.

Bovenstaande berekening bevat vrij veel uitleg en is wat lang om in je schrift op te schrijven. Het is prima om je berekening zo op te schrijven:

Handwritten calculations on grid paper:

20 Δ , 30 \square , 12 \diamond :

1) $20 + 30 + 12 = 62$ grensvlakken

2) $20 \cdot 3 = 60$
 $30 \cdot 4 = 120$
 $12 \cdot 5 = 60$ } $60 + 120 + 60 = 240$ zijden $\rightarrow 240 : 2 = 120$ ribben

3) Euler: $G + H - R = 2$
 $62 + H - 120 = 2$
 $\rightarrow H = 60 \rightarrow 60$ hoekpunten

4) Δ : $60 : 60 = 1$
 \square : $120 : 60 = 2$
 \diamond : $60 : 60 = 1$ } Dus 1 driehoek, 2 vierkanten en 1 vijfhoek per hoekpunt.

Opgave 1.

Deze opdracht gaat over een veelvlak met 4 driehoeken en 4 zeshoeken.

- Bereken het aantal grensvlakken van dit veelvlak.
- Leg uit dat de losse polydronstukjes die je voor dit veelvlak nodig hebt samen 36 zijden hebben.
- Hoeveel ribben heeft dit veelvlak?
- Gebruik de formule van Euler om het aantal hoekpunten van het veelvlak te berekenen.
- Hoeveel hoekpunten hebben de losse driehoekige polydronstukjes samen?
- Hoeveel driehoeken zitten er dus in elk hoekpunt van het veelvlak?
- Bereken nu ook hoeveel vierkanten er in elk hoekpunt van het veelvlak zitten.

Opgave 2.

Deze opdracht gaat over een veelvlak met 32 driehoeken en 6 vierkanten.

- a) Bereken het aantal grensvlakken van dit veelvlak.
- b) Bereken het aantal zijden dat de losse polydronstukjes die je voor dit veelvlak nodig hebt samen hebben.
- c) Hoeveel ribben heeft dit veelvlak?
- d) Gebruik de formule van Euler om het aantal hoekpunten van het veelvlak te berekenen.
- e) Hoeveel hoekpunten hebben de losse driehoekige polydronstukjes samen?
- f) Hoeveel driehoeken zitten er dus in elk hoekpunt van het veelvlak?
- g) Bereken nu ook hoeveel vierkanten er in elk hoekpunt van het veelvlak zitten.

Opgave 3.

Deze opdracht gaat over een veelvlak met 30 vierkanten, 20 zeshoeken en 12 tienhoeken.

- a) Bereken het aantal grensvlakken van dit veelvlak.
- b) Bereken het aantal ribben van dit veelvlak.
- c) Gebruik de formule van Euler om het aantal hoekpunten van het veelvlak te berekenen.
- d) Bereken hoeveel vierkanten er in elk hoekpunt van het veelvlak zitten.
- e) Bereken hoeveel zeshoeken er in elk hoekpunt van het veelvlak zitten.
- f) Bereken hoeveel tienhoeken er in elk hoekpunt van het veelvlak zitten.

Opgave 4.

Deze opdracht gaat over een veelvlak met 80 driehoeken en 12 vijfhoeken.

- a) Bereken het aantal grensvlakken van dit veelvlak.
- b) Bereken het aantal ribben van dit veelvlak.
- c) Gebruik de formule van Euler om het aantal hoekpunten van het veelvlak te berekenen.
- d) Bereken hoeveel driehoeken er in elk hoekpunt van het veelvlak zitten.
- e) Bereken hoeveel vijfhoeken er in elk hoekpunt van het veelvlak zitten.

Verslag Platonische en Archimedische veelvlakken van en

Inleiding

- Beschrijf in dit stukje dat we het de afgelopen weken gehad hebben over Platonische en Archimedische veelvlakken.
- Vertel ook dat je van de veelvlakken van de ene soort (hoe heet die soort?) alle veelvlakken gebouwd hebt van polydron en van de andere soort (hoe heet die soort?) er ook nog één gemaakt hebt.

Platonische veelvlakken

- Vertel hier aan welke eigenschappen een Platonisch veelvlak moet voldoen.
- Vertel welke 5 Platonische veelvlakken bestaan, hoeveel grensvlakken ze hebben en welke vorm die grensvlakken hebben.
- Leg uit dat er geen andere dan deze 5 Platonische veelvlakken zijn. Doe dit door uit te leggen waarom er geen Platonische veelvlak bestaat met zeshoeken als grensvlakken.
- Leg uit dat als er geen Platonisch veelvlak bestaat met zeshoeken er zeker geen Platonisch veelvlak bestaat met een grensvlak met meer dan zes hoeken.

Archimedisch veelvlak

- Vertel hier aan welke eigenschappen een Archimedisch veelvlak moet voldoen.
- Leg het verschil uit tussen een Platonisch veelvlak en een Archimedisch veelvlak.

Formule van Euler

- Geef de formule van Euler.
- Bereken voor hoeveel grensvlakken en ribben een Archimedisch veelvlak heeft, dat bestaat uit 32 driehoeken en 6 vierkanten. Hiervoor gebruik je de formule van Euler nog niet.
- Laat met een berekening zien dat dit veelvlak 24 hoekpunten heeft. Gebruik hiervoor de formule van Euler en het aantal grensvlakken en ribben dat je hierboven berekend hebt.
- Leg uit hoeveel driehoeken en hoeveel vierkanten in elk hoekpunt van het veelvlak bij elkaar komen.

Eigen Archimedisch veelvlak

- Vertel hoe jullie veelvlak is opgebouwd (uit welke vormen bestaat hij en hoeveel van elk).
- Laat zien hoe je berekent hoeveel grensvlakken, ribben en hoekpunten jullie veelvlak heeft.
- Beschrijf ook hoe hij er in ieder hoekpunt uitziet.

Slot

- Vertel wat je van dit onderwerp en de opdracht vond.
- Beschrijf hoe jullie samenwerking was.

Inleveren

- Controleer of jullie namen op het verslag staan.
- Sla het verslag op onder de naam "Verslag-naam1-naam2", bijv. "Verslag-Mark-Monique".
- Lever het verslag in op teams bij Opdrachten.
- Let op dat je je verslag als bijlage toevoegt!