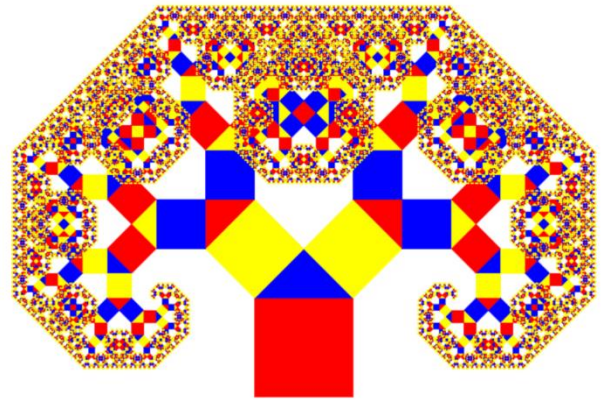
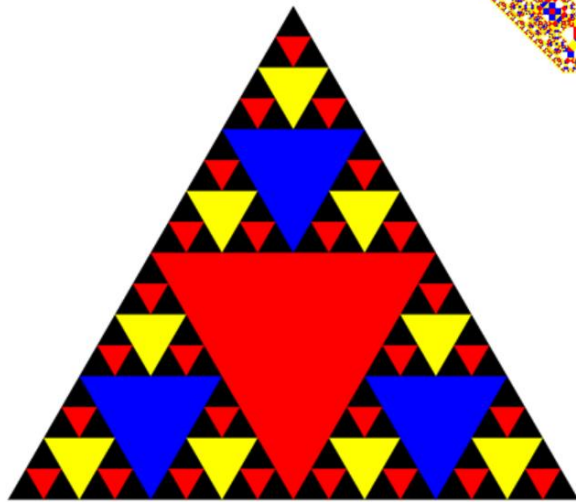


Stedelijk Gymnasium Nijmegen

Fractals

Intermezzo 2016 - 2017



vierkant

wiskunde

Naam: _____

STEDELIJK
GYMNASIUM
NIJMEGEN



Inhoud

Een woord vooraf.....	4
Over Fractals	5
1 De eerste fractals.....	6
1.1 Cantor-Verzameling.....	6
1.2 De Koch-Kromme.....	8
1.3 Minkowski-eiland	9
2 De Sierpinski-fractals.....	10
2.1 Sierpinski-driehoek.....	10
2.1.1 Variaties op de Sierpinski driehoek	11
2.2 De getallendriehoek	12
2.3 Sierpinski-vierkant.....	13
2.3.1 Menger Spons	14
3 Zelfgelijkendheid en herhaling.....	15
4 Zelf fractals maken	16
4.1 Een fractal vouwen.....	16
4.2 Ontwerp je eigen fractal.....	18

Een woord vooraf...

Voor je ligt je eigen 'wiskundeboek'. Dit boekje gaat je laten zien dat wiskunde meer is dan het alleen maken van sommetjes en dat er ook andere sommetjes bestaan dan je tot nu toe hebt leren kennen op de basisschool. Voordat we echt kunnen beginnen moeten we enkele afspraken maken en willen we je enkele tips geven. De tips en afspraken zullen ook in de les besproken worden, maar staan hieronder ook nog even samengevat zodat je ze niet kan vergeten.

Afspraken

- Opgaven maak je met ballpoint of pen, tekeningen altijd met potlood en liniaal/geodriehoek maken.
- Maak voor elke bladzijde een kantlijn en werk netjes.
- Fout gemaakte opgaven altijd opnieuw maken en verbeteren met een ANDERE kleur. Maak zo nodig met een andere kleur een geheel nieuwe berekening. Zoek uit **waarom** je antwoord fout is.
- Bij goed gemaakte opgaven komt een krul te staan. Als je niet zeker weet of je het goed uitgewerkt hebt, vraag het dan aan je docent. Gebruik bij het nakijken een rood of groen schrijvende pen.

Tips:

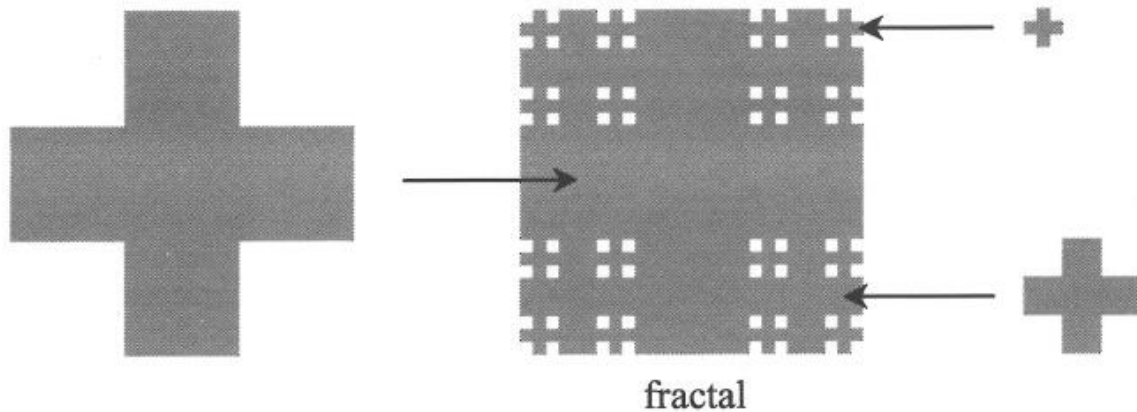
- Een antwoord is mooi, de weg naar het antwoord nog veel mooier. Probeer je gedachten goed op papier te krijgen.
- Kwaliteit gaat voor kwantiteit. Je schrift moet niet alleen te begrijpen zijn voor jou, maar ook voor anderen die erin kijken.
- Lees ook de tekst tussen de opgaven goed door. Hier staat vaak belangrijke informatie voor de volgende vraag of een stukje theorie.

Succes met puzzelen!

Over Fractals

Dit boekje gaat over fractals. Fractals spreek je uit als frektuls, het is een Engels woord. Het Nederlandse woord voor fractal is fractaal, maar dit wordt niet veel gebruikt.

Fractals zijn plaatjes of ruimtelijke figuren met bijzondere eigenschappen. De eigenschappen kunnen op een ingewikkelde manier precies worden uitgelegd. Het bekijken van een fractal als eerste kennismaking is eenvoudiger en duidelijker. In figuur 1 zie je een fractal.



Figuur 1

Fractals zijn figuren, waarin een motief zich op een steeds kleinere of grotere schaal herhaalt. De fractal in figuur 1 bijvoorbeeld bestaat uit een kruis, met vier kleinere kruisen in de lege hoeken, waarbij elk kleinere kruis vier nog kleinere kruisen in zijn lege hoeken heeft....

In het plaatje van de *wiskundige* fractal in figuur 1 herhaalt het motief zich drie keer. Bij wiskundige fractals herhaalt een motief zich oneindig vaak, maar dat kun je niet tekenen. Sommige fractals hebben door deze oneindige herhaling heel verrassende eigenschappen.

Fractals zijn aanvankelijk ontdekt door wiskundigen. Je komt fractals overal tegen. Ze komen veel voor in de natuur en worden tegenwoordig op allerlei gebieden toegepast, onder meer in reclames, filmdecors en elektrische apparaten.

Bij het maken van de opgaven in dit boek leer je van alles over fractals.

1 De eerste fractals

De allereerste fractal in de geschiedenis is de Cantor-verzameling, in 1883 bedacht door de Duitser Georg Cantor. De tweede fractal, de Koch-kromme, werd in 1904 beschreven door Helge von Koch. De laatste fractal van dit hoofdstuk is van Hermann Minkowski (1864 – 1909). In de loop der tijd zijn veel andere fractals bedacht, hoewel de naam fractal toen nog niet bestond. Die stamt uit 1975.



Cantor



Koch



Minkowski

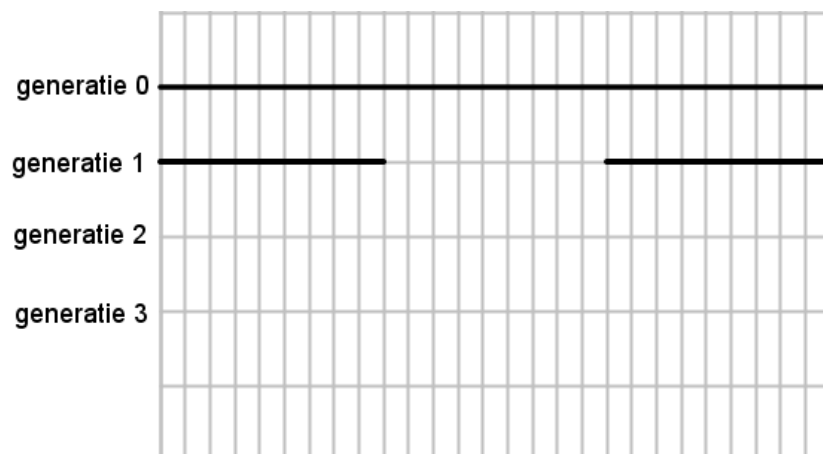
1.1 Cantor-Verzameling

De Cantor verzameling is een eenvoudige fractal. Hij begint met een lijnstuk (figuur 2). Dit is een deel van een rechte lijn dat wordt begrensd door twee eindpunten.



Figuur 2

Het lijnstuk heet generatie 0 van de fractal. Generatie 1 ontstaat door het lijnstuk in drie gelijke delen te verdelen en het middelste deel weg te nemen. De generatie 0 en 1 zijn getekend in figuur 3.



Figuur 3

Generatie 2 ontstaat door elk lijnstuk van generatie 1 in drie gelijke delen te verdelen en elk middelste deel weg te laten.

Opdracht 1

Teken generatie 2 van de Cantor-verzameling op het werkblad.

Elke volgende generatie ontstaat door op de generatie ervoor de volgende bewerking toe te passen:

- 1) Verdeel elk lijnstuk in drie gelijke delen;
- 2) Laat elk middelste deel weg.

Opdracht 2

Teken generatie 3 van de Cantor-verzameling op het werkblad.

Lijnstuk 1 heeft een lengte van 1. In generatie 1 heb je twee lijnstukken van lengte $\frac{1}{3}$. Dus in totaal hebben de lijnstukken in generatie 1 een lengte van $\frac{2}{3}$ samen. Je kan nu de volgende tabel maken:

Generatie	0	1	2	3	4
Aantal lijnstukken	1	2			
Lengte per lijnstuk	1	$\frac{1}{3}$			
Totale lengte van de lijnstukken	1	$\frac{2}{3}$			

Opdracht 3

Neem de tabel over en vul deze verder in.

Er zijn punten die altijd zullen blijven, in welke generatie je ook komt.

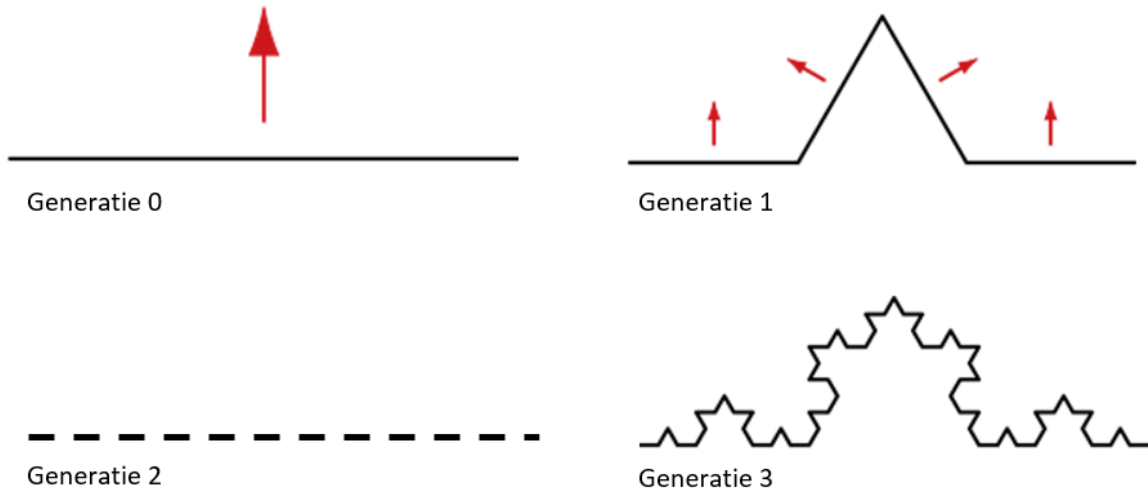
Opdracht 4

Geef op het werkblad in generatie 3 aan welke punten altijd blijven bestaan.

Zoals je ziet, verdubbelt het aantal eindpunten van de lijnstukken bij elke volgende generatie. Dit zijn de punten van de fractal die nooit zullen verdwijnen. Er blijken zelfs nog meer punten te blijven bestaan, maar om dat te kunnen begrijpen moet je een wiskundige zijn. Deze verzameling van losse punten, het zijn er oneindig veel, vormen samen de Cantor-verzameling. Een andere, toepasselijke, naam is Cantor-stof.

1.2 De Koch-Kromme

De Zweed Helge von Koch bedacht in 1904 de Koch-kromme. Je ziet hem in figuur 4 tot generatie 3. Generatie 0 van de kromme is een lijnstuk.



Figuur 4

In figuur 4 zijn generatie 0,1 en 3 getekend. De pijlen helpen je om te zien hoe de volgende generatie ontstaat.

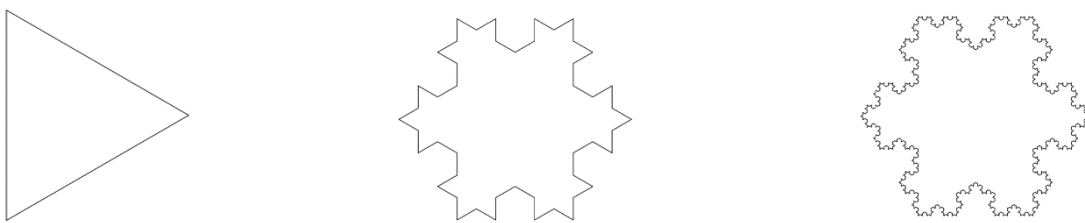
Elke volgende generatie van de Koch-kromme ontstaat door de volgende vervangingsregels toe te passen:

- 1) Verdeel elk lijnstuk in drie even grote lijnstukken;
- 2) Verwijder het middelste lijnstuk;
- 3) Vul het lege stuk op met twee lijnstukken die even lang zijn als het verwijderde lijnstuk; doe dat zo dat de twee lijnstukken het verwijderde deel samen een driehoek vormen.

Opdracht 5

Teken generatie 2 van de Koch-kromme in je schrift. Neem aan dat generatie 0 negen cm lang is.

De Koch-sneeuwvlok zie je in figuur 5. Er zijn 3 generaties getekend. Deze bestaat uit meerdere Koch-Kromme.



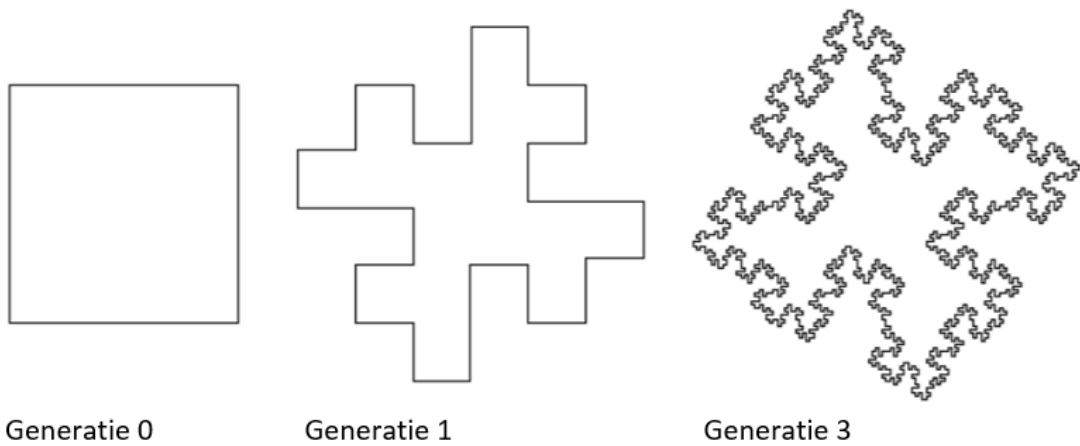
Figuur 5 De Koch-sneeuwvlok.

Opdracht 6

Hoeveel Koch-Krommen vormen samen een Koch-Sneeuwvlok?

1.3 Minkowski-eiland

Heet Minkowski-eiland (of Minkowski sausage) is een fractal waarbij elk lijnstuk wordt vervangen door een kromme. De generaties 0,1 en 3 zie je in figuur 6.



Figuur 6: Minkowski-eiland

Generatie 0 bestaat uit vier lijnstukken. Ieder lijnstuk wordt vervangen door een kromme.

Opdracht 7

Teken op het werblad de vorm die elk lijnstuk vervangt om de volgende generatie van het Minkowski-eiland te krijgen.

Generatie 0 bestaat uit vier lijnstukken van lengte 1 en heeft een omtrek van 4. De oppervlakte van generatie 0 is 1. We kunnen de volgende tabel maken:

Generatie	0	1	2	3	4
omtrek	4				
oppervlakte	1				

Opdracht 8

Neem de tabel over en vul deze verder in.

Opdracht 9

Waarom verandert de grootte van de oppervlakte niet?

2 De Sierpinski-fractals

De Poolse wiskunde Waclaw Sierpinski beschreef in 1916 de Sierpinski-driehoek en het Sierpinski-vierkant. Sierpinski werd, onder andere dankzij deze fractals, zo beroemd dat een krater op de maan naar hem is vernoemd.

2.1 Sierpinski-driehoek

De Sierpinski-driehoek heeft als generatie 0 een zwarte gelijkzijdige driehoek. Elk volgende generatie ontstaat na het toepassen van de volgende vervangingsregels:

- 1) Verdeel een zwarte driehoek in vier gelijke driehoeken door de middens van de zijden met drie lijnen met elkaar te verbinden;
- 2) Verwijder de middelste driehoek.

Opdracht 10

Teken op het werkblad de generaties 1 en 2 van de Sierpinski-driehoek. Kleur de zwarte delen.

De Sierpinski-driehoek bestaat uit een groot aantal zwarte driehoeken.

Opdracht 11

Bereken hoeveel zwarte driehoeken je hebt in generatie 5.

Opdracht 12

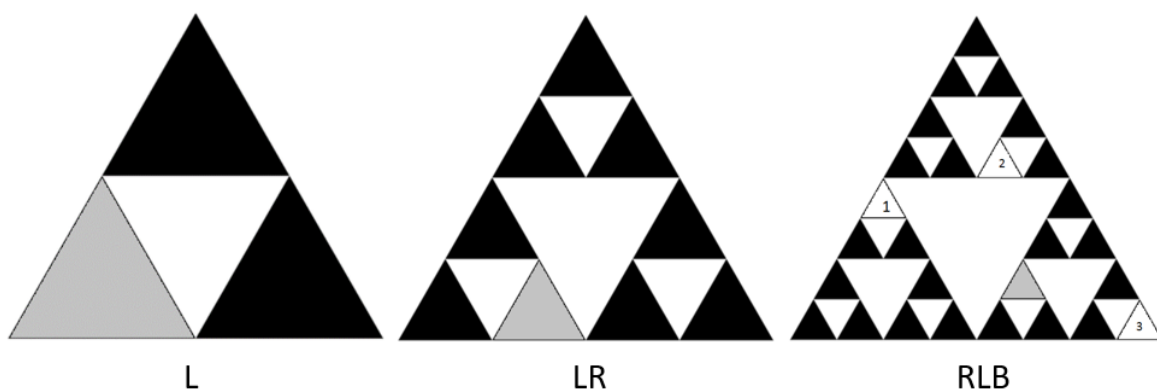
Hoe zie je aan de Sierpinski-driehoek wat zijn generatie is?

Na een oneindig aantal generaties noemen we de driehoek een ideale Sierpinski-driehoek.

Opdracht 13

Hoeveel driehoeken heeft de ideale Sierpinski-driehoek?

Elke driehoek in de Sierpinski-driehoek heeft een 'adres'. Het bestaat uit een of meer van de letters L (links), R (rechts) en B (boven). Het aantal letters in het adres is gelijk aan de generatie van de fractal waarin de driehoek zit. In figuur 7 staan onder de generaties 1-3 het adres van de grijs gekleurde driehoek.



Figuur 7 adres

Je leest het 'adres' als volgt. L is de linker driehoek van generatie 1. LR ligt in generatie 2 in de linker driehoek van generatie 1, hierin is het de rechter driehoek.

Opdracht 14

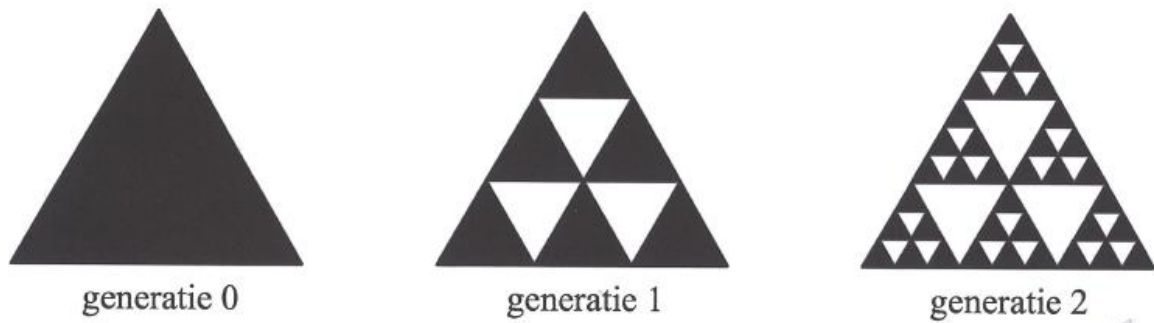
Leg uit wat de code RLB betekent.

Opdracht 15

In generatie 3 is in drie driehoeken een cijfer gezet. Geef de code van deze driehoeken.

2.1.1 Variaties op de Sierpinski driehoek

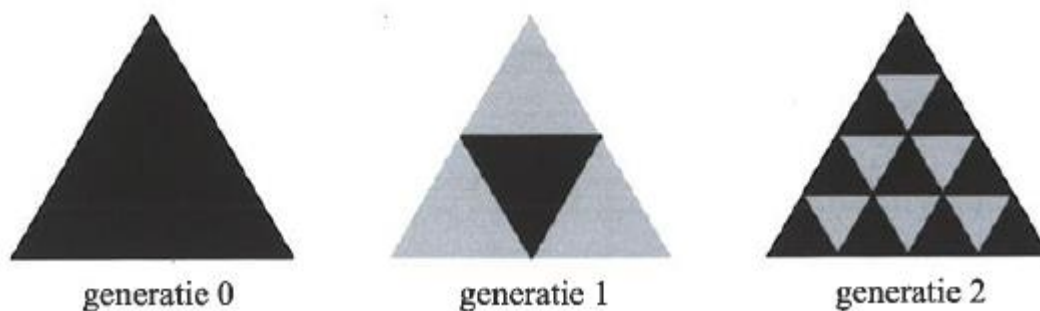
De manier waarop Sierpinski van een regelmatige driehoek een fractal maakte, is niet de enige mogelijke manier. In de figuur 8 en 9 zie je twee andere fractals met een zwarte driehoek in generatie 0.



Figuur 8

Opdracht 16

Wat zijn de vervangingsregels van de fractal in figuur 8?



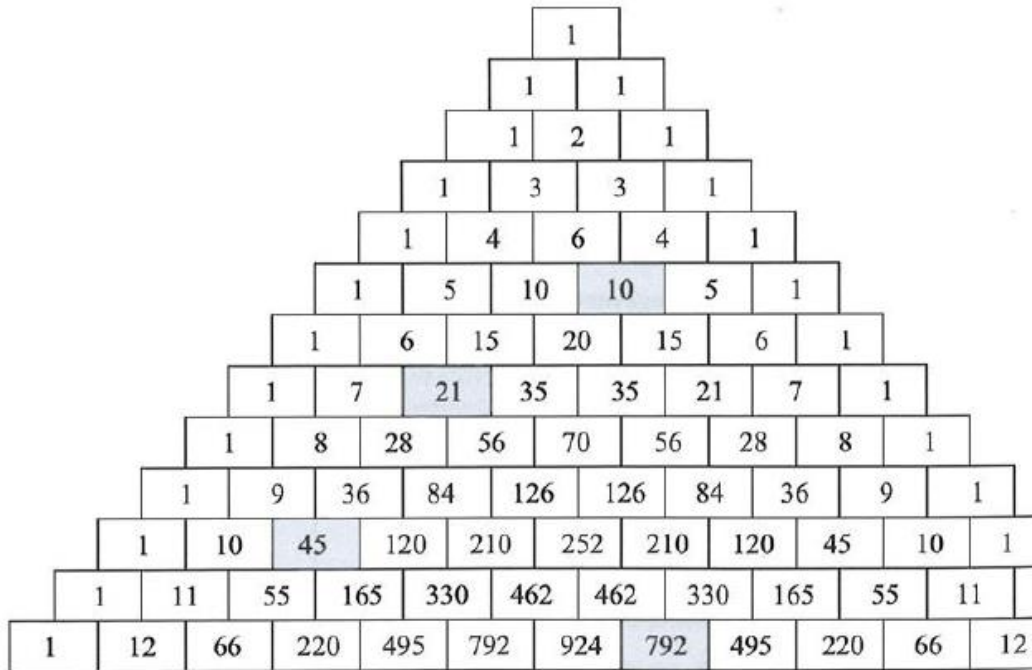
Figuur 9

Opdracht 17

Wat zijn de vervangingsregels van de fractal in figuur 9?

2.2 De getallendriehoek

In figuur 1 is de getallendriehoek getekend. De getallendriehoek is een driehoek die volgens een eenvoudige regel is opgebouwd uit getallen. Elk getal is de som van de twee andere getallen in driehoek die er vlakbij staan.

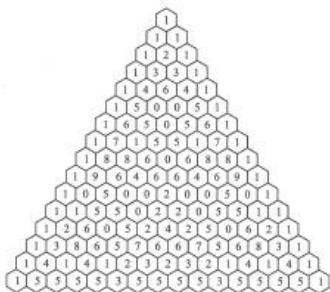


Figuur 10

Opdracht 18

In de getallendriehoek van figuur 10 staan vier getallen in een grijs vakje. Kleur op het werkblad de vakjes van twee getallen die vlakbij de 10 staan en die bij elkaar opgeteld 10 zijn. Doe hetzelfde voor de getallen 21, 45 en 792.

In figuur 11 is een getallendriehoek getekend, waarbij in de zeshoekige vakjes alleen het laatste cijfer van de getallen is afgedrukt.



Figuur 11

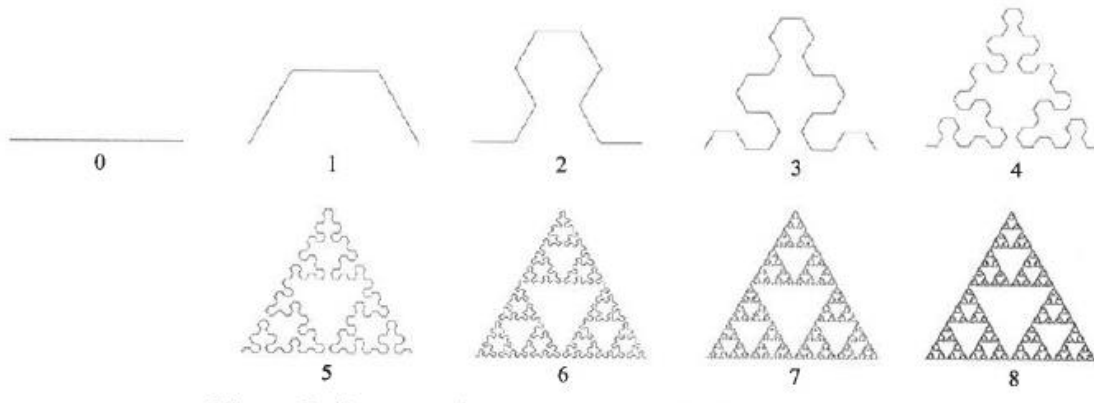
Opdracht 19

Kleur in de getallendriehoek op het werkblad alle zeshoeken waarin een oneven getal staat.

Opdracht 20

De oneven getallen in de getallendriehoek vormen samen een fractal. Welke generatie van welke fractal zie je?

In figuur 12 zijn de generatie 0-8 van de Sierpinski-arrowhead getekend. Vanaf generatie 7 lijkt deze fractal sprekend op de sierpinski-driehoek. De lijn die de Sierpinski-arrowhead vormt kruipt op verschillende plaatsen zo dicht tegen zichzelf aan dat er, voor het menselijk oog, zwarte driehoeken ontstaan.



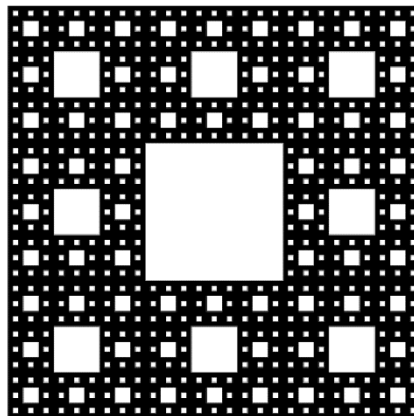
Figuur 12

Opgave 21

Teken de vervangingsregel voor de Sierpinski-arrowhead.

2.3 Sierpinski-vierkant

Sierpinski beschreef ook het Sierpinski-vierkant. Het verwant aan twee fractals die je inmiddels kent.



Figuur 13 Het Sierpinski-vierkant.

Opgave 22

Welke generatie van het Sierpinski-vierkant is in figuur 13 getekend? Leg uit waar je dat aan ziet.

Opgave 23

Teken op het werkblad de generatie 0 en 2 van het Sierpinski-vierkant.

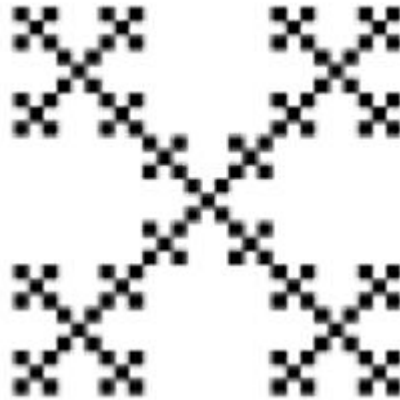
Opgave 24

Wat zijn de vervangingsregels van het Sierpinski-vierkant?

Opgave 25

Hoeveel witte vierkantjes heeft de 4^e generatie van de Sierpinski-vierkant?

Hieronder zie je de derde generatie van de box fractal. Dit is een variatie van het Sierpinski-vierkant.



Figuur 14 Box fractal

Opdracht 26

Teken de generatie 2 van de box fractal op het werkblad.

Opdracht 27

Wat zijn de vervangingsregels van de box fractal?

2.3.1 Menger Spons

De Oostenrijken Menger bedacht in 1926 de eerste ruimtelijke fractal, de Menger Spons (figuur 15).



Figuur 15 Menger Spons

Opdracht 28

Van welke fractal is de Menger-Spons de ruimtelijke uitvoering?

Opdracht 29

Hoe ziet generatie 0 van de Menger-spons er uit?

Opdracht 30

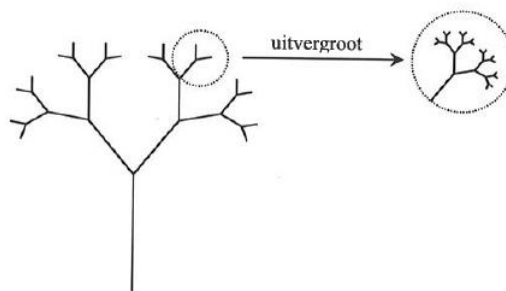
Wat zijn de vervangingsregels van de Menger Spons?

3 Zelfgelijkendheid en herhaling

De fractals die je hebt leren kennen, hebben allemaal de eigenschap *zelfgelijkendheid*. Een fractal is zelfgelijkend wanneer een deel van de fractal gelijk is aan de hele fractal. Dit deel bevat, net als de hele fractal, volgende generaties tot in het oneindige. Hierdoor kun je, wanneer je één generatie van een fractal onder ogen krijgt, bedenken hoe vorige en volgende generaties eruitzien. Je hebt dat al gedaan: je hebt vorige generaties bepaald van het Sierpinski-vierkant en volgende generaties van de Sierpinski-driehoek.

Een motief *herhaalt* zich in verschillende groottes. Het grootste motief vind je voor het eerst bij generatie 1, het op één na grootste voor het eerst bij generatie 2, enzovoort.

In figuur 16 is generatie 4 van een fractale boom getekend. In deze fractal komt het motief in verschillende groottes voor.



Figuur 16

Opdracht 31

Teken de generaties 0-3 van de fractale boom. Neem als lengte van de boomstam 4 cm. (Onderzoek eerst eens wat er steeds met de lengte gebeurt).

Opdracht 32

In hoeveel groottes komt dit motief voor in generatie 4?

Opdracht 33

Hoe vaak komt het motief per generatie voor? Tel het aantal motieven voor elke generatie en in alle groottes.

Neem over en vul in:

Generatie 0: Keer

Generatie 1: Keer

Generatie 2: + =..... keer

Generatie 3: + + =..... keer

Generatie 4: + + + =..... Keer

4 Zelf fractals maken

In dit hoofdstuk ga je zien dat je een fractal kan vouwen. Daarna ga je er zelf één bedenken en tekenen.

4.1 Een fractal vouwen.

Van een stuk papier kun je verrassend eenvoudig fractals maken. Je gaat een draakkromme vouwen.

Van een lange strook papier kun je een fractal vouwen. Wanneer je het papier oneindig vaak zou kunnen dubbelvouwen, kun je een draakkromme leggen. In figuur 17 is een aantal generaties van deze kromme getekend. Let op de vorm van de verschillende generaties, niet op de grootte.

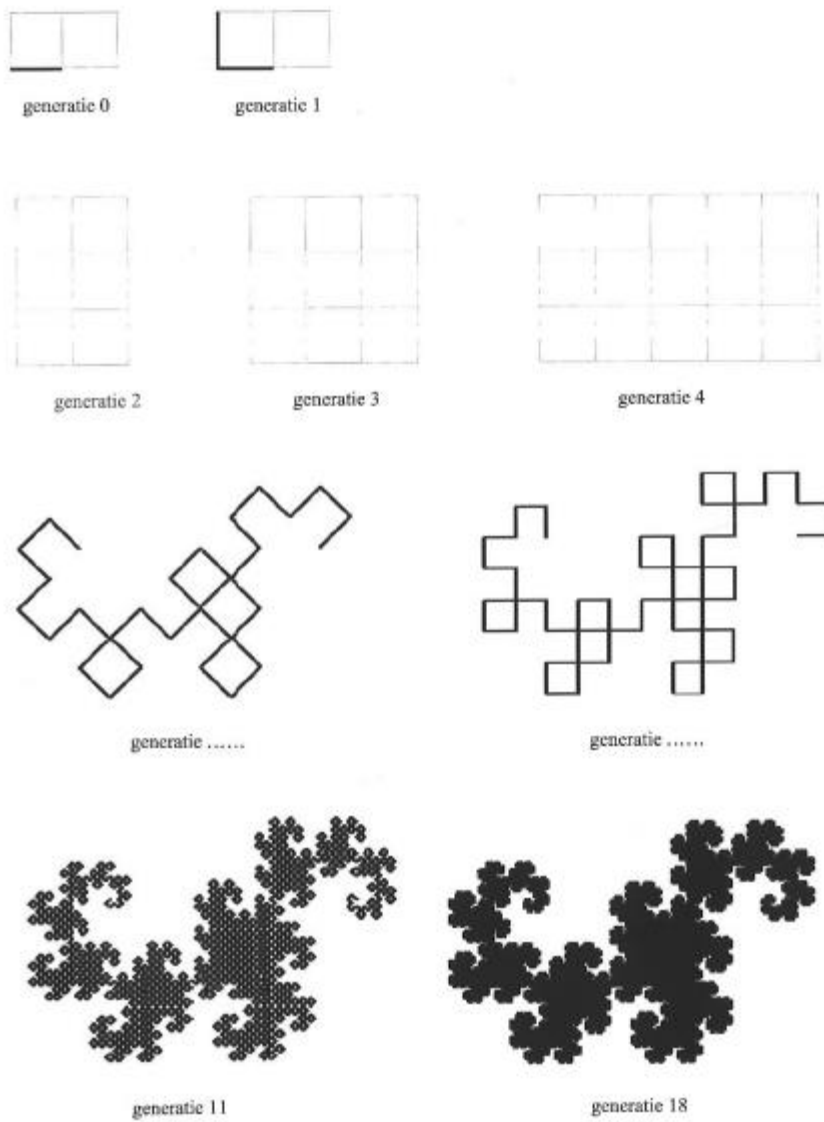
Opdracht 34

Maak de draakkromme van een strook papier. Deze strook papier kan je bij de docent krijgen. Je krijgt de draakkromme door de strook papier telkens dubbel te vouwen. Iedere keer dat je de strook dubbelvouwt ga je naar een volgende generatie. Ga als volgt te werk:

- 1) *Leg de strook horizontaal voor je. Dit is generatie 0 van de draak (zie figuur 17).*
- 2) *Vouw de strook zó dat het linker uiteinde precies op het rechter uiteinde komt te liggen. Vouw het papier halfopen, waarbij de hoek tussen de twee delen een rechte hoek is. Dit is generatie 1 van de draak, zie figuur 17. Vouw de strook weer dicht.*
- 3) *Vouw de strook opnieuw, zo dat de gebouwen kant op de losse uiteinden komt te liggen. Vouw het papier open, zorg ervoor dat alle hoeken recht zijn. Dit is generatie 2 van de draak. **Teken hem op het werkblad.** Vouw de strook weer dicht.*
- 4) *Vouw het papier dicht en open zoals bij de vorige stap. Dit is generatie 3 van de draak. **Teken hem op het werkblad.** Vouw de strook weer dicht.*
- 5) *Vouw het papier dicht en open zoals bij de vorige stap. Dit is generatie 4 van de draak. **Teken hem op het werkblad.***

Opdracht 35

Onder generatie 2, 3 en 4 zijn nog twee generaties getekend. Welke twee generaties zijn dit?



Figuur 17

4.2 Ontwerp je eigen fractal

Je weet nu zoveel over fractals, dat je er zelf een kunt ontwerpen.

Opdracht 36

Ontwerp een fractal. Maak je ontwerp eerst op kladpapier. Vraag daarna een A3 papier en teken daarop netjes de eerste drie of vier generaties. Schrijf op de achterkant van je A3 de regelmaat/vervangingsregels van jouw fractal.

Lukt het je niet om zelf een fractal te bedenken? Hieronder vind je enkele tips:

- Bekijk de site van Henk Reuling, <http://henkreuling.nl/> het kopje applets en dan het kopje fractals.
- Ga op google zoeken. Goede zoektermen zijn: **simple fractal** of **box fractal**.
- Maak dan een variatie, bijvoorbeeld op het Sierpinski-vierkant. Verdeel een vierkant in negen gelijke vierkanten waarna je het middelste vierkant in de bovenste rij verwijdert òf de vier vierkanten op de hoekpunten verwijdert òf