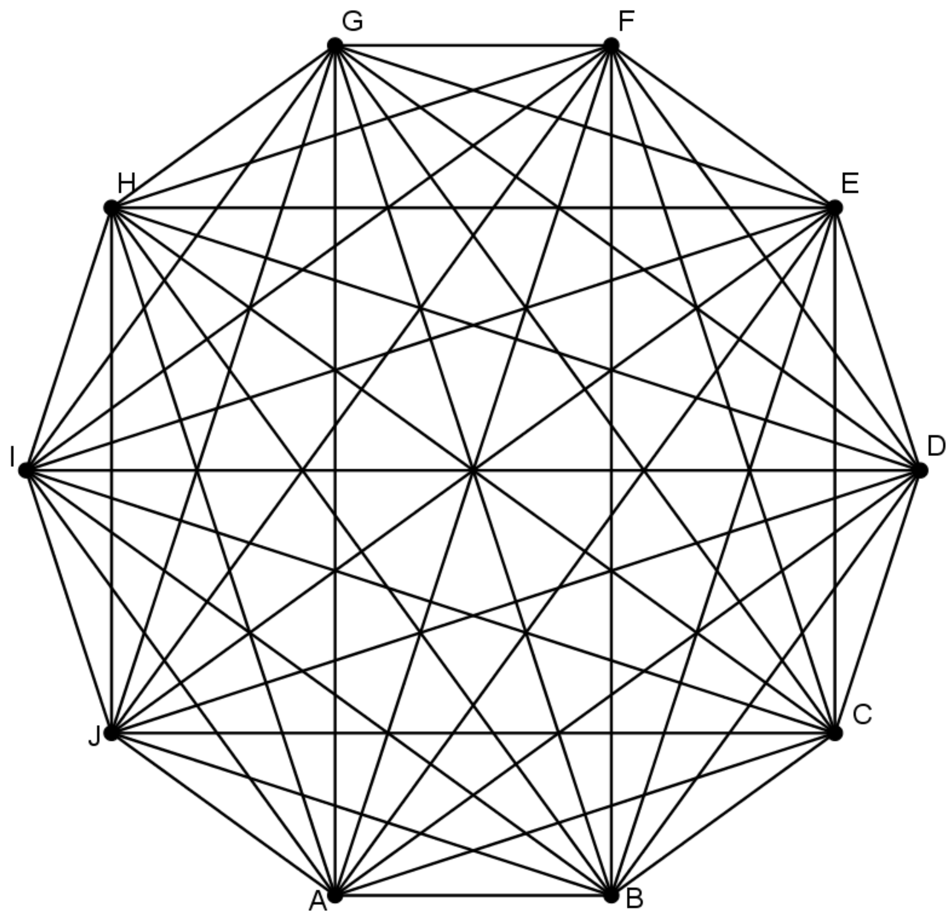
Grafentheorie



Geschreven voor Intermezzo 2020-2021

Geschreven door Monique Stienstra

STEDELIJK GYMNASIUM NIJMEGEN

Naam:……………………………………………………………….

Inhoud

Een woord vooraf…

Voor je ligt je tweede eigen 'wiskundeboek'. In dit boekje ga je verder met leren redeneren op een wiskundige manier. Net als in het vorige boekje is de weg naar een antwoord, dus het logisch nadenken en uitleggen wat je gedachtegang is, weer veel belangrijker dan het eindwoord. Voordat we beginnen herhalen we enkele afspraken maken en willen we je enkele tips geven. De tips en afspraken zullen ook in de les besproken worden en heb je ook in het vorige boekje gekregen, maar staan hieronder ook nog even samengevat zodat je ze niet kunt vergeten.

Afspraken

- Opgaven maak je met ballpoint of pen, tekeningen altijd met potlood en liniaal/geodriehoek maken.
- Maak voor elke bladzijde een kantlijn en werk netjes.
- Fout gemaakte opgaven altijd opnieuw maken en verbeteren met een ANDERE kleur. Maak zo nodig met een andere kleur een geheel nieuwe berekening. Zoek uit ***waarom*** je antwoord fout is.
- Bij goed gemaakte opgaven komt een krul te staan. Als je niet zeker weet of je het goed uitgewerkt hebt, vraag het dan aan je docent. Gebruik bij het nakijken een rood of groen schrijvende pen.

Tips:

- Een antwoord is mooi, de weg naar het antwoord nog veel mooier. Probeer je gedachten goed op papier te krijgen.
- Kwaliteit gaat voor kwantiteit. Je schrift moet niet alleen te begrijpen zijn voor jou, maar ook voor anderen die erin kijken.
- Lees ook de tekst tussen de opgaven goed door. Hier staat vaak belangrijke informatie voor de volgende vraag of een stukje theorie.
- Neem voldoende ruimte in je schrift. Als je je tekeningen heel klein maakt, is het lastig om nog goed te zien wat je doet.

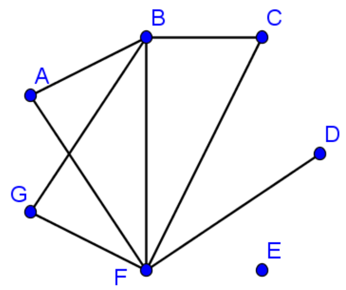
Succes met puzzelen!

1. De aap in de bananenbomen

Een aap leeft in een oerwoud dat grenst aan een bananenplantage. Iedere avond, voor het slapen gaan, eet hij zijn buik rond in zijn favoriete een bosje van 7 bananenbomen. Hij gaat daarbij van boom naar boom en van sommige bomen zijn de bananen zo goed, dat hij daar vaker komt. Daarna valt hij voldaan in slaap. Overdag komt hij niet in de bananenbomen, dan speelt hij met zijn vriendjes, peutert met een stokje mieren uit mierenhopen en doet hij zich te goed aan andere vruchten.

Iedere ochtend maakt een onderzoeker de een tekening van de weg die de aap de vorige avond aflegde. Zoals gezegd kan de aap wel vaker in een bepaalde boom komen, maar hij loopt slechts één keer langs iedere lijn.

Opgave 1 – De aap in de bananenbomen
Op een ochtend maakt de onderzoeker de tekening die je hiernaast ziet.



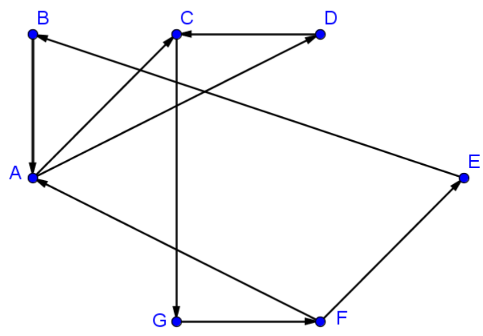
- **a)** Zijn er bomen waar de aap meer dan één keer geweest is?
- **b)** Zijn er bomen waar de aap niet is geweest?
- **c)** Leg uit waar de aap zijn tocht begonnen en geëindigd kan zijn.

Het plaatje dat de onderzoeker tekende was een schematische weergave van de werkelijkheid, hij had het bosje niet precies zo nagetekend als het in het echt was. Dat was ook helemaal niet nodig, omdat hij alleen wilde laten zien in welke volgorde de aap de bomen bezocht had. Zo'n plaatje dat bestaat uit punten en lijnen, noemen we een *graaf*. Punten die met elkaar verbonden zijn, zijn elkaars *buren*. Het aantal buren dat een punt heeft, noemen we zijn *graad*.

Opgave 2

- **a)** Geef voor elk van de punten uit de graaf van opgave 1 aan wie de buren van het punt zijn.
- **b)** Geef ook de graad van ieder punt.

Opgave 3
De onderzoeker vond het wel jammer dat hij niet genoteerd had in welke richting de aap zich had verplaatst. Nu wist hij niet of het ene punt het beginpunt was en het andere het eindpunt, of dat dat net andersom het geval was. Hij besloot daarom de volgende ochtend de richting te vermelden, zie het plaatje hiernaast.



- **a)** Leg uit waar de aap zijn toch begonnen is.
- **b)** Leg ook uit waar de aap zijn tocht geëindigd is.

Een graaf waarin de richting van de lijnen vermeld wordt, zoals in opgave 3, heet een *gerichte* graaf. Een graaf waarin de richting van de lijnen niet vermeld wordt, zoals in opgave 1, heet een *ongerichte* graaf. Net zoals bij de gerichte graaf, kunnen we bij een ongerichte graaf over de graad van de punten spreken. Je kunt daarbij onderscheid maken tussen de *ingraad*, waarbij je kijkt naar het aantal lijnen dat in een punt aankomt, en naar de *uitgraad*, waarbij je kijkt naar het aantal lijnen dat vanuit een punt vertrekt.

Opgave 4

a) Vul onderstaande tabel in voor de graaf uit opgave 3:

Punt	Graad	Ingraad	Uitgraad	Ingraad + Uitgraad
A				
B				
C				
D				
E				
F				
G				

b) Wat valt je op als je de laatste kolom met de tweede vergelijkt? Leg uit waarom dit zo is.

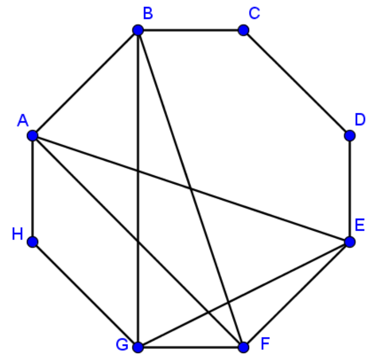
Een rondwandeling in een graaf wordt een *cykel* genoemd. Een rondwandeling in een graaf waarbij je alle lijnen precies één keer bewandelt en in hetzelfde punt eindigt als waar je begint, heet een *Eulercykel*. Als je wel alle lijnen precies één keer bewandelt, maar niet in je beginpunt eindigt, heet dit een *Eulerpad*. We gaan nog eens kijken naar de graden van de punten die wel eind-of beginpunt kunnen zijn en naar de graden van de punten die dat niet kunnen zijn.

Opgave 5

a) Welke punten konden in opgave 1 eind- of beginpunt zijn?
b) Wat is de graad van deze punten?
c) Welke punten konden in opgave 3 eind- of beginpunt zijn?
d) Wat is de graad van deze punten?
e) Zijn er nog andere punten die dezelfde graad hebben?
f) Leg uit wat er bijzonder is aan de graad van de eind- of beginpunten en waarom juist deze punten eind- of beginpunt moeten zijn.

Je hebt nu gezien dat als er twee punten met oneven graad zijn, precies die punten het begin- en eindpunt moeten zijn.

Opgave 6



In de graaf hiernaast is geen punt met oneven graad. Dit kan toch wel de weergave van een wandeling van de aap zijn.

a) Leg uit dat je nu niet kunt zeggen wat het begin- en eindpunt van de wandeling zijn.

b) Wat voor iets anders opvallends kun je wel zeggen over het begin- en eindpunt?

Opgave 7

a) Probeer eens een wandeling van de aap te tekenen waarbij hij in zeven bomen komt en waarbij er meer dan twee punten met een oneven graad zijn.

b) Leg uit waarom dat niet lukt.

c) Stel dat je geen wandeling hoeft te kunnen maken, kun je dan wel meer dan twee punten met een oneven graad krijgen?

d) Kun je dan ieder aantal punten met een oneven graad krijgen, of kunnen bepaalde aantallen nog steeds niet? (Probeer bijv. eens een graaf te maken met 3 of 5 punten met oneven graad.) Leg uit waarom bepaalde aantallen punten met oneven graad niet kunnen.

Opgave 8

Onderzoek hoe het met de ingraad en uitgraad zit bij wandelingen in gerichte grafen. Gebruik in elk geval de volgende woorden en zinnetjes: ingraad – uitgraad – beginpunt – eindpunt – oneven – even – Eulerpad – Eulercykel.

Opgave 9 – Samenvatting

We hebben in deze paragraaf al een boel geleerd. Dit gaan we op een rijtje zetten. Neem de zinnen over en vul ze aan.

a) Punten die met een ander punt verbonden zijn, heten ….

b) Het aantal buren van een punt, heet de …… van het punt.

c) Bij een Eulerpad hebben het begin- en eindpunt een … graad.

d) Bij een Eulercykel hebben het begin- en eindpunt een … graad.

e) In een gerichte graaf zijn er twee soorten graden, namelijk de …. en de … .

f) In een gerichte graaf geldt: … + … = graad.

g) Bij een Eulercykel in een gerichte graaf zijn de ingraad en de uitgraad van een punt ….

h) Bij een Eulerpad in een gerichte graaf is de …-graad van het beginpunt één groter dan de …-graad van het beginpunt. Voor het eindpunt geldt dit net andersom.

i) In een graaf is altijd een … aantal punten met oneven graad of … punten met een oneven graad.

2. Echtparen aan tafel

Peter Pietersen en zijn vrouw Pieternel geven een feestje. Ze nodigen nog vier echtparen uit, namelijk Jasper en Jolijn Joosten, Theo en Tineke Terwindt, Hans en Hanja Hendriks en Ahmed en Antje Arends. Eerdere ervaringen hebben hen geleerd dat steeds of alle vrouwen samenklitten of dat de mannen alleen met hun vrouw praten. Ze hebben daarom bedacht dat ze een tafelschikking gaan maken, waarbij de mannen en vrouwen om en om aan de tafel zitten en waarbij niemand naast zijn eigen partner zit.

Opgave 10

a) Teken een mogelijke tafelschikking voor dit feestje.
b) Teken een graaf waarbij je alle mensen die naast elkaar mogen zitten, met een lijn verbindt. Probeer de graaf zo overzichtelijk mogelijk weer te geven!
c) Geef met een kleurtje de tafelschikking die je bij onderdeel **a)** bedacht hebt weer in je graaf van onderdeel **b)**.

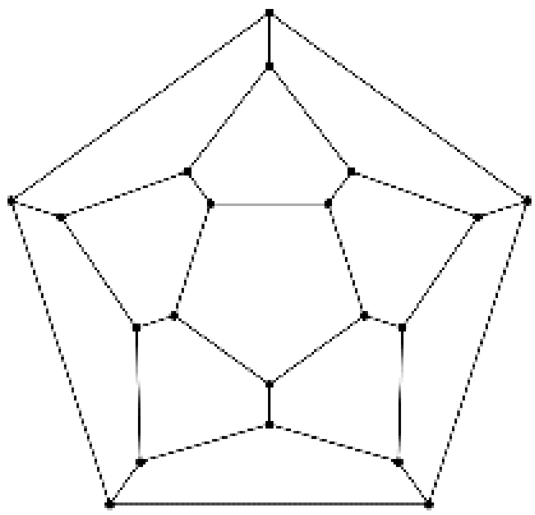
De route door de graaf die je in onderdeel **c)** van de eerste opgave getekend hebt, zal een rondwandeling zijn die langs alle punten van de graaf gaat. Een cykel die door alle punten precies één keer gaat, heet een *Hamiltoncykel*.

Opgave 11

a) Leg uit wat het verschil is tussen een Eulercykel en een Hamiltoncykel.
b) Teken een graaf met een Eulercykel die ook een Hamiltoncykel is.
c) Teken een graaf met een Hamiltoncykel die geen Eulercykel heeft.

Opgave 12

Teken in onderstaande graaf een Hamiltoncykel. Dit mag gewoon in je boekje.



Een *Hamiltonpad* lijkt veel op een Hamiltoncykel. Ook hier wandel je langs alle punten, alleen is het begin- en eindpunt nu niet hetzelfde. In de volgende opgave, is een Hamiltonpad de oplossing.

Opgave 13

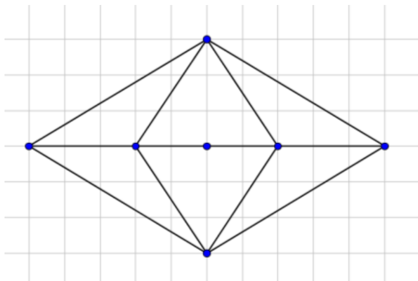
Vijf spelers *A*, *B*, *C*, *D* en *E* willen een halve competitie badminton spelen, dat wil zeggen dat ieder tweetal eenmaal tegen elkaar speelt. Iedereen wil na een partij uitrusten voordat hij aan de volgende begint, dus niemand mag twee rondes na elkaar spelen. Als *A* en *B* in de eerste ronde tegen elkaar spelen, dan mogen zij niet in de tweede ronde spelen en zal de volgende partij dus *C-D*, *C-E* of *D-E* moeten zijn.

- **a)** Schrijf alle partijen die gespeeld moeten worden op. (Tip: het zijn er 10.)
- **b)** Teken 10 punten in je schrift en zet de namen van de partijen erbij.
- **c)** Verbind de partijen met elkaar die na elkaar gespeeld mogen worden.
- **d)** Teken in de graaf die je in onderdeel **a)**, **b)** en **c)** ontworpen hebt een pad dat een mogelijke volgorde van de partijen aangeeft.
- **e)** Leg uit dat deze route een Hamiltonpad is.

Opgave 14

In de graaf die hiernaast staat, willen we de getallen 1 t/m 7 plaatsen op zo'n manier dat de buurpunten nergens opeenvolgende getallen krijgen.

Neem de graaf over in je schrift en probeer een oplossing te vinden.



Het probleem blijkt iets makkelijker te worden als we de punten zo proberen te nummeren dat bij buren juist wel opvolgende getallen staan. We maken daarvoor een nieuwe graaf, waarbij we de punten verbinden als ze eerst niet verbonden waren en juist niet verbinden als ze dat eerst wel waren. Zo'n graaf heet een *complementaire* graaf.

Opgave 15

- **a)** Teken de complementaire graaf van de graaf uit opgave 14.
- **b)** Nu moet je de opeenvolgende getallen juist wel bij de punten zetten die buren van elkaar zijn.
- **c)** Leg uit dat je oplossing een Hamiltonpad is.
- **d)** Heb je nu ook een oplossing voor het probleem uit opgave 14? Licht je antwoord toe.

Het woord *complementair* betekent *aanvullend*. In een complementaire graaf teken je precies alle lijnen die er eerst niet waren. Eigenlijk vul je de graaf dus aan tot hij *volledig* is. Een *volledige graaf* is een graaf waarin alle punten buren van elkaar zijn.

Opgave 16

a) Teken een volledige graaf met 5 punten.
b) Wat is de graad van ieder punt?
c) Hoeveel lijnen heeft een volledige graaf met 5 punten?

Opgave 17

a) Joris zegt: In een volledige graaf met 6 punten heeft ieder punt graad 5. Een volledige graaf met 6 punten heeft dus $6 \cdot 5 = 30$ punten. Geef commentaar op de opmerking van Joris.
b) Hoeveel lijnen heeft een volledige graaf met 6 punten volgens jou? Hoe heb je dat berekend?

Opgave 18

a) Hoeveel lijnen heeft een volledige graaf met 100 punten?
b) Bereken hoeveel punten een volledige graaf met 300 lijnen heeft.
c) Bedenk een formule voor het aantal lijnen in een volledige graaf met n punten.

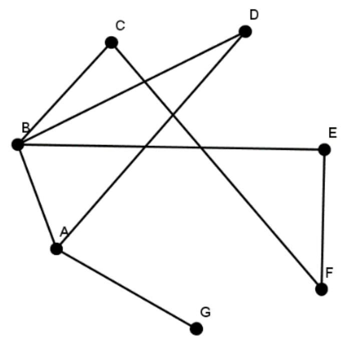
Opgave 19 – Samenvatting

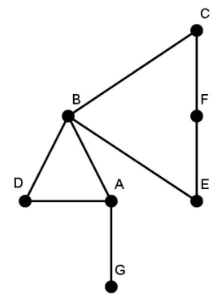
Neem de zinnen over en vul ze aan.

a) Een cykel die langs alle punten gaat, heet een …
b) Het verschil tussen een Hamiltonpad en een Hamiltoncykel is …
c) Het complement van een graaf is een graaf waarbij …
d) In graaf waarbij alle punten elkaars buren zijn, heet een …
e) Het aantal lijnen in een graaf + het aantal lijnen in de … graaf = het aantal lijnen in een … graaf.
f) Het aantal lijnen in een volledige graaf met n punten is …

3. Planaire grafen

We gaan nog even terug naar de apenonderzoeker uit de eerste paragraaf. De apenonderzoeker werkte niet alleen, hij had een assistent meegenomen die de apen ook observeerde en grafen maakte van hun wandelingen. Op een ochtend tekenden de onderzoeker en zijn assistent elk een graaf van wandeling van de aap. Hun tekeningen staan hieronder:





De linkergraaf is die van de onderzoeker, de rechter is van zijn assistent. Hoewel zij dezelfde aap geobserveerd hadden, leek het er op dat ze verschillende grafen hadden getekend.

Opgave 20

Bekijk de grafen en leg uit dat ze toch wel dezelfde wandeling getekend hebben.

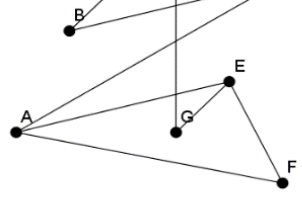
We hebben gezien dat het in een graaf niet uitmaakt waar je de punten precies tekent. Twee grafen zijn hetzelfde als de punten op precies dezelfde manier verbonden zijn. Twee grafen die hetzelfde zijn, die dus zo te vervormen zijn dat ze er hetzelfde uitzien, heten *isomorf*. Als er in de ene graaf een lijn loopt tussen de punten A en B, dan moet er in de isomorfe graaf ook een lijn lopen tussen de punten A en B. En als die lijn er in de ene graaf niet is, mag hij er in de isomorfe graaf ook niet zijn.

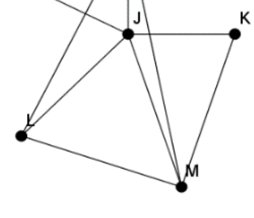
De onderzoeker had de bomen heel precies getekend zoals ze stonden. Hij vroeg aan zijn assistent waarom hij dat niet gedaan had. De assistent legde uit dat hij het overzichtelijker vond als de lijntjes zo min mogelijk door elkaar heen liepen. De onderzoeker vond dat eigenlijk best een goed idee en besloot een paar grafen opnieuw te tekenen op de manier van zijn assistent.

Opgave 21

Hiernaast staan twee grafen die de onderzoeker getekend heeft.

Teken de grafen op de manier van de assistent, dus met zo min mogelijk lijnen die elkaar snijden.

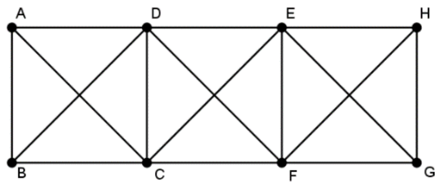


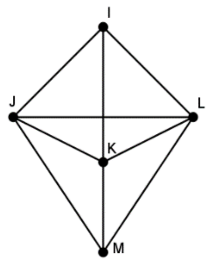


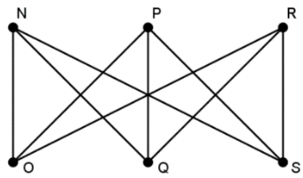
Een graaf waarbij de lijnen elkaar niet snijden, heet een *planaire graaf*. Niet iedere graaf is te tekenen als een planaire graaf.

Opgave 22

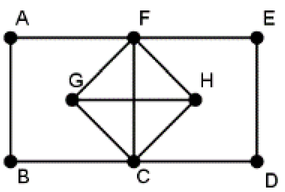
Onderzoek of je onderstaande grafen als planaire grafen kunt tekenen.

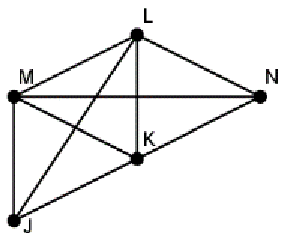






Opgave 23





a) Teken bovenstaande grafen planair.

b) Onderzoek hoeveel lijn je maximaal kunt toevoegen voordat hij niet meer planair getekend kan worden.

c) Voeg zo min mogelijk lijnen toe om hem niet meer planair de maken.

Opgave 24 – Samenvatting

Neem de zinnen over en vul ze aan.

a) Twee grafen die dezelfde punten hebben en waar dezelfde punten verbonden zijn, zijn ….

b) Een graaf die geen lijnen heeft die elkaar snijden heet een …

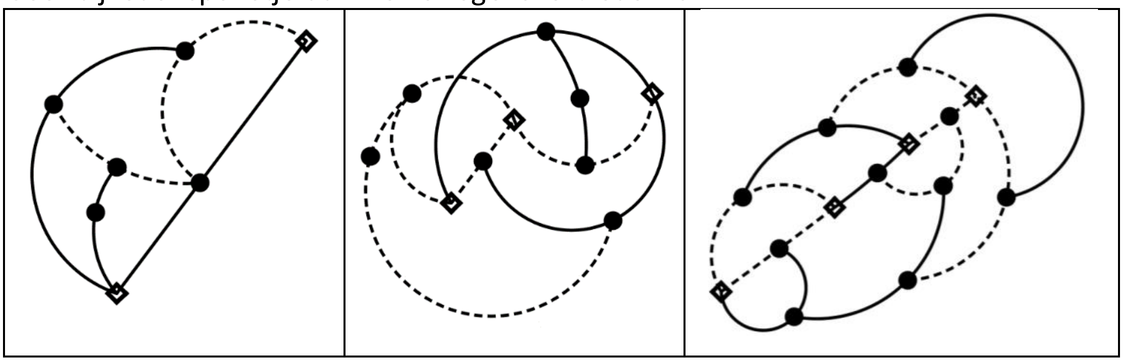
4. Uitlopers

Het spelletje *"Uitlopers"* speel je als volgt:

- Spreek een aantal punten af waarmee je begint, bijv. 5.
- Het maximaal aantal beurten dat je het spelletje speelt, is één minder dan drie keer het aantal punten waar je mee begint (als je met 5 punten begint dus maximaal 14).
- Om de beurt trek je een lijn tussen 2 punten en zet je een punt op de lijn die je net getekend hebt, waarbij je rekening houdt met de volgende twee regels:
  - Je mag hierbij niet een lijn snijden die er al staat.
  - Ieder punt mag maximaal graad 3 krijgen.
- De winnaar is degene die de laatste geldige lijn getrokken heeft.

Opgave 25
Hieronder is het spel een aantal keer gespeeld. De beginpunten zijn steeds aangegeven met een vierkantje. De ene speler trekt stippellijnen, de ander doorgetrokken lijnen. Bij ieder spelletje is niet helemaal volgens de regels gespeeld.

Geef bij ieder spelletje aan welke regel overtreden is.



Opgave 26

Speel het spelletje een paar keer met een klasgenoot. Houd bij wie er begint, na hoeveel beurten (van beide spelers bij elkaar) het spel afgelopen is en wie er gewonnen heeft. Doe dit in je schrift in een tabel die er zo uitziet als de tabel hieronder.

	Aantal beginpunten	Begonnen	Gewonnen	Na … beurten
Spel 1				
Spel 2				
Spel 3				
Spel 4				
Spel 5				

Opgave 27

Leg uit wat slim is om te doen en wat minder slim is om te doen als je het spelletje Uitlopers wilt winnen. Lukt het je al om een winnende strategie uit te leggen? Zo niet, dan moet je het spelletje misschien nog een aantal keer spelen.

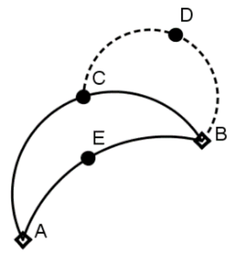
Opgave 28

Bij dit spel is afgesproken dat het maximum aantal beurten één kleiner is dan drie keer het aantal punten waar je mee begint. In deze opgave beginnen we het spel met drie punten.

a) Hoeveel zetten mogen er dan maximaal gedaan worden?

b) Probeer eens een spel te tekenen, waarbij er meer dan het maximum aantal toegestane zetten gedaan worden.

Je hebt in opgave 28 gemerkt dat het niet lukt meer dan het 8 zetten te doen als je met drie punten begint. We gaan uitzoeken waarom dit zo is. Voordat we dit doen, introduceren we het begrip *vrijheidsgraad*. De *vrijheidsgraad* van een spel is de som van de maximaal mogelijke graad van ieder punt min de graad van ieder punt. Dat klinkt misschien wel moeilijk, maar met een plaatje erbij, wordt het vast duidelijker.



In het spelletje hiernaast is men begonnen met 2 punten. Na drie beurten zijn er inmiddels 5 punten. Ieder punt mag maximaal graad 3 krijgen, dus de som van de maximaal mogelijke graad van ieder punt is $5 \cdot 3 = 15$.
We zien de volgende graden van de punten: $A \rightarrow 2$, $B \rightarrow 3$, $C \rightarrow 3$, $D \rightarrow 2$, $E \rightarrow 2$. De vrijheidsgraad van deze graaf is dus $15-2-3-3-2-2=3$.

Opgave 29

We beginnen weer met 3 punten.

a) Welke graad heeft ieder punt bij de start van het spel (dus nog voordat er een zet gedaan is)?

b) Welke graad mag ieder punt maximaal in het spel bereiken?

c) Wat is dus de vrijheidsgraad voor de eerste beurt?

Opgave 30

Nu trekken we in de eerste beurt de eerste lijn met punt.

a) Wat is nu de som van maximale mogelijke graad van de punten?

b) Hoe verandert de graad van de twee beginpunten?

c) En wat is de graad van het nieuwe punt?

d) Dus wat is nu de vrijheidsgraad?

Opgave 31

In de iedere volgende beurt trek je weer een lijn.

a) Hoe verandert de graad van de twee punten die je verbindt?

b) En wat is de graad van het nieuwe punt op de lijn?

c) Hoe verandert de som van maximale mogelijke graad van de punten?

d) Hoe verandert de vrijheidsgraad dus?

Opgave 32

Leg nu uit waarom je nooit meer dan drie keer het aantal beginpunten min één beurten kunt hebben in dit spel, zelfs als het wel zou mogen.

5. Bronnen

Doeboek Vierkant voor wiskunde nr. 5: Van plattegrond tot scharrelkip – F. Göbel

Website www.hhofstede.nl

Diswis – De praktijk

Dictaat Grafentheorie Radboud Universiteit – Ruud Jeurissen

Spel, spelen, spelletjes – David Pritchard, Lifetime books

Boekje Verzamelingen en modulo rekenen – Mark Coumans